① Osamurtohajotelma (huomaa, että $x=-1$ on nimittäjän kaksinkertainen nollakohta):

$$\frac{x}{(x+1)^2(x-1)} \equiv \frac{\overset{(x+1)(x-1)}{A}}{x+1} + \frac{\overset{x-1}{B}}{(x+1)^2} + \frac{\overset{(x+1)^2}{C}}{x-1} \iff$$

$$x \equiv A(x^2-1) + B(x-1) + C(x^2+2x+1) \iff$$

$$x \equiv (A+C)x^2 + (B+2C)x + (-A-B+C) \iff$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C = 1 \\ -A - B + C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C = 1 \\ -B + 2C = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + 2C = 1 \\ 4C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -C = -\frac{1}{4} \\ B = 1 - 2C = \frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Siis

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \int\left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C,$$

missä $x \in I$ ja I on $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ tai $]1,\infty[$ ja C on vakio.

② Kokeilemalla havaitaan, että $x=2$ on polynomin x^3-2x^2+x-2 nollakohta, siis se on jaollinen $(x-2)$:lla.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+1 \\ \hline x-2 & x^3-2x^2+x-2 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & x-2 \\ & x-2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Siis $x^3-2x^2+x-2 = (x-2)(x^2+1)$. Huomaa, ettei toisen asteen tekijällä x^2+1 ole (reaalisia) nollakohtia, siis se on ns. jaoton toisen asteen tekijä.

Osamurtohajotelma:

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+1)} \equiv \frac{\overset{x^2+1}{A}}{x-2} + \frac{\overset{x-2}{Bx+C}}{x^2+1} \iff$$

$$1 \equiv A(x^2+1) + B(x^2-2x) + C(x-2) \iff$$

$$1 \equiv (A+B)x^2 + (-2B+C)x + (A-2C)$$

$$\begin{cases} A+B & =0 \\ \quad -2B+C & =0 \\ A \quad\; -2C & =1 \quad \leftarrow (-1) \end{cases} \iff \begin{cases} A+B & =0 \\ \quad -2B+C & =0 \\ \quad -B-2C & =1 \quad \leftarrow (2) \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} A+B & =0 \\ \quad -2B+C & =0 \\ \quad -5B & =1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-B=\frac{1}{5} \\ B=-\frac{1}{5} \\ C=2B=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

Siis

$$\frac{1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x^2+1}$$

ja

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x-2} = \int \frac{dx}{(x-2)(x^2+1)} = \int\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} - \frac{1}{10}\cdot\frac{D(x^2+1)}{x^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-2| - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) - \frac{2}{5}\arctan x + C,$$

missä $x \in I$ ja I on $]-\infty, 2[$ tai $]2, \infty[$ ja C on vakio.

3 Tehtävän integraali on verkkomonisteen luvussa 1.18 esitettyä tyyppiä (1.19). Tehdään siis sijoitus $t=\sqrt{x}$, jolloin tehtävä muuntuu rationaalifunktion integroimiseksi. Nyt $x=t^2$, $dx = 2t\,dt$ ja saadaan

$$\int \frac{dx}{x-x\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2-t^2 t} = \int \frac{2t\,dt}{t^2(1-t)} = \int \frac{-2\,dt}{t(t-1)}.$$

Osamurtohajotelma:

$$\frac{-2}{t(t-1)} \equiv {}^{t-1)}\frac{A}{t} + {}^{t)}\frac{B}{t-1} \iff -2 \equiv A(t-1)+Bt \iff$$

$$-2 \equiv (A+B)t - A \iff \begin{cases} A+B=0 \\ -A \;\; =-2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=2 \\ B=-2. \end{cases}$$

Siis

$$\int \frac{-2}{t(t-1)}\,dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{2}{t-1}\right)dt = 2\ln|t| - 2\ln|t-1| + C$$

$$= 2\ln x^{\frac{1}{2}} - 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$$

$$\overset{(*)}{=} \ln x - 2\ln|\sqrt{x}-1| + C,$$

(*) $\ln x^a = a\ln x$ kaikilla $x \in]0,\infty[$ ja $a \in \mathbb{R}$.

missä $x \in I$ ja I on $]0,1[$ tai $]1,\infty[$ ja C on vakio.

4. $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$, joten

$$\int \cos^2(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$, joten

$$\int \sin^2(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C.$$

5. Koska $\cos^2(x) \le 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin $1+\cos^2(x) \le 2$ ja $(1+\cos^2(x))^{-1} \ge \frac{1}{2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Niinpä Lauseen 1.32 (d) perusteella

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx \ge \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}\,dx = \Big/_0^{\pi/4} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Koska $D\cos^2(x) = -2\cos(x)\sin(x) \le 0$ kaikilla $x \in [0, \pi/4]$, niin $\cos^2(x)$ on välillä $[0, \pi/4]$ vähenevä funktio. Siis $\cos^2(x) \ge \cos^2(\pi/4)$ ja $(1+\cos^2(x))^{-1} \le (1+\cos^2(\pi/4))^{-1} = (1+1/2)^{-1} = 2/3$ kaikilla $x \in [0, \pi/4]$. Niinpä Lauseen 1.32 (d) perusteella

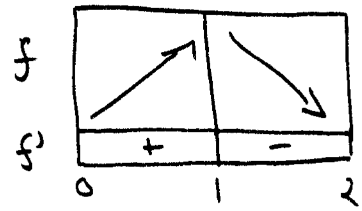
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx \le \int_0^{\pi/4} \frac{2}{3}\,dx = \Big/_0^{\pi/4} \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

6. Huomaa, että myös välin $[0,2]$ päätepisteet ovat sen jakopisteitä. Siis tarkasteltavana on välin $[0,2]$ jako $D = (0, 1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 5/4, 6/4, 7/4, 8/4)$. Koska integroitava funktio $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ on jatkuva, se saa jokaisella suljetulla välillä suurimman ja

pienimmän arvon. Lisäksi f:llä on derivaatta, jota voidaan käyttää näiden arvojen selvittelyssä.

$$f'(x) = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 0 \iff$$

$x = 0$ (tai $x=-1$) tai $x = 1$



Koska derivaatan nollakohdat ovat tarkasteltavien välien päätepisteitä, f saa suurimman ja pienimmän näillä väleillä päätepisteissä.

Koska jatkuva funktio f saa jokaisella suljetulla välillä suurimman ja pienimmän arvon,

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

on f:n suurin arvo välillä $[x_{i-1}, x_i]$ ja

$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

on f:n pienin arvo välillä $[x_{i-1}, x_i]$. Nyt $x_i = i/4$, $i \in \{0, \ldots, 8\}$ ja saadaan

$$S_D = \sum_{i=1}^{8} M_i(x_i - x_{i-1}) = \overbrace{f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [0,1/4]} + \overbrace{f(\tfrac{2}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [1/4,2/4]} + \overbrace{f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [2/4,3/4]}$$

$$+ \underbrace{f(\tfrac{4}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [3/4,4/4]} + \underbrace{f(\tfrac{4}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [4/4,5/4]} + \underbrace{f(\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [5/4,6/4]} + \underbrace{f(\tfrac{6}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [6/4,7/4]} + \underbrace{f(\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [7/4,8/4]}$$

$\approx 0{,}504$ ja

$$s_D = \sum_{i=1}^{8} m_i(x_i - x_{i-1}) = \overbrace{f(0)\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [0,1/4]} + \overbrace{f(\tfrac{1}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [1/4,2/4]} + \overbrace{f(\tfrac{2}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [2/4,3/4]} + \overbrace{f(\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}^{\text{väli } [3/4,4/4]}$$

$$+ \underbrace{f(\tfrac{5}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [4/4,5/4]} + \underbrace{f(\tfrac{6}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [5/4,6/4]} + \underbrace{f(\tfrac{7}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [6/4,7/4]} + \underbrace{f(\tfrac{8}{4})\cdot\tfrac{1}{4}}_{\text{väli } [7/4,8/4]} \approx 0{,}339.$$

Siis

$$0{,}33 < s_D \leq \int_0^2 x^2 e^{-x^2}\,dx \leq S_D < 0{,}51.$$