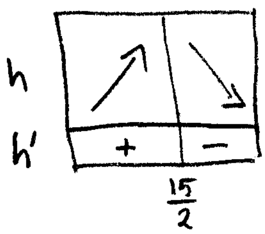
(1) <u>Ratkaisutapa I (parametriesityksen avulla).</u> Etsitään aluksi tasojen leikkaussuoralle parametriesitys.

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ x+y-z=0 \end{cases} \cdot(-1) \iff \begin{cases} 2z=30 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=15 \\ z=15 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x=t,\ t\in\mathbb{R}, \\ y=15-x=15-t, \\ z=15. \end{cases}$$

Siis leikkaussuoralla tehtävän funktio $f(x,y,z)=xyz$ saa arvot $t(15-t)15=225t-15t^2$, $t\in\mathbb{R}$. Merkitään $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=225t-15t^2$. Siis on etsittävä funktion h suurin arvo. Nyt $h'(t)=225-30t=0$ $\iff$ $t=15/2$.



Niinpä h:n suurin arvo on $h(\frac{15}{2})=843\frac{3}{4}$. Tämä on siis f:n suurin arvo leikkaussuoralla. Funktiolla f ei ole pienintä arvoa leikkaussuoralla, sillä $\lim_{t\to\infty} h(t)=-\infty$.

<u>Ratkaisutapa II (Lagrangen menetelmällä).</u> Tehtävässä on annettu funktio $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=xyz$. Olkoot $g_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z)=x+y+z-30$, $g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_2(x,y,z)=x+y-z$ ja $B=g_1^{-1}(0)\cap g_2^{-1}(0)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=0 \text{ ja } g_2(x,y,z)=0\}$. Nyt voidaan soveltaa Lagrangen menetelmää (Lauseen 4.39 versio), koska vektorit $\nabla g_1(x,y,z)=(1,1,1)$ ja $\nabla g_2(x,y,z)=(1,1,-1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat ($\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,-1)=(0,0,0)$ vain kun $\alpha=\beta=0$), niin $f|B$:n lokaalit ääriarvokohdat (x,y,z) toteuttavat seuraavan yhtälöryhmän.

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z)-\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)-\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)=(0,0,0) \text{ joillakin } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R} \\ g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} yz-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ xz-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ xy-\lambda_1+\lambda_2=0 \\ x+y+z-30=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz=\lambda_1+\lambda_2=xz \\ x+y+z=30 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-x)z=0 \\ x+y+z=30 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x+z=30 \\ 2x-z=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} z=0 \\ x+y=30 \\ x+y=0 \end{cases} \text{ ei ratkaisua}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=x \\ 4x=30 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{15}{2} \\ y=\frac{15}{2} \\ z=15. \end{cases}$$

Siis ainoat ehdokkaat $f|B$:n lokaaliksi ääriarvokohdaksi ja lokaaliksi ääriarvoksi ovat $(15/2, 15/2, 15)$ ja $f(15/2, 15/2, 15) = 843\frac{3}{4}$.

Tutkimalla tasojen leikkaussuoraa (helpoiten tämä käy ratkaisutavassa I esitetyn leikkaussuoran parametriesityksen avulla) nähdään, että leikkaussuoralta voidaan valita jana J, jonka ulkopuolella ja päätepisteissä $f(x,y,z)<0$. Koska jana J on kompakti, jatkuva funktio f saa siinä suurimman arvon. Koska $f(15/2, 15/2, 15)>0$, niin janan J valinnan perusteella f:n suurimman arvon kohdalla janalla J täytyy olla $f|B$:n lokaali ääriarvokohta. Siis sen täytyy olla ainoa ehdokas $(15/2, 15/2, 15)$. Niinpä f:n suurin arvo koko leikkaussuoralla B on $f(15/2, 15/2, 15) = 843\frac{3}{4}$.

Funktiolla f ei ole pienintä arvoa leikkaussuoralla B. Tämäkin on helpointa nähdä ratkaisutavan I parametriesitystä käyttäen.

(2) Differentiaaliyhtälö: $y'' + ay + y = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.

(a) Jos $y(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$, niin $y'(x) = c_1 + 2c_2x$ ja $y''(x) = 2c_2$. Sijoittamalla nämä tehtävän differentiaaliyhtälöön saadaan

$$2c_2 + a(c_0 + c_1x + c_2x^2) + c_0 + c_1x + c_2x^2 = 0 \iff$$
$$(2c_2 + (a+1)c_0) + (a+1)c_1x + (a+1)c_2x^2 = 0,$$

minkä pitää pätea kaikilla ratkaisuvälin kuuluvilla x. Koska ratkaisuväli sisältää äärettömän monta pistettä, tämä on mahdollista vain, jos

$$\begin{cases} 2c_2 + (a+1)c_0 = 0 \\ (a+1)c_1 = 0 \\ (a+1)c_2 = 0 \end{cases}$$

Jos $a \neq -1$, niin tämän yhtälöryhmän ratkaisu on $c_0 = 0$, $c_1 = 0$ ja $c_2 = 0$. Koska $c_2 = 0$, niin tässä tapauksessa yksikään toisen asteen polynomi ei toteuta tehtävän differentiaaliyhtälöä.

Jos $a = -1$, niin tämän yhtälöryhmän ratkaisu on $c_0 \in \mathbb{R}$, $c_1 \in \mathbb{R}$ ja $c_2 = 0$ (eli c_0 ja c_1 ovat mitä tahansa reaalilukuja ja $c_2 = 0$). Koska $c_2 = 0$, niin tässäkään tapauksessa yksikään toisen asteen polynomi ei toteuta tehtävän differentiaaliyhtälöä.

Siis tehtävän differentiaaliyhtälöllä ei ole ratkaisuna toisen asteen polynomia.

(b) Jos $y(x) = \sin x$, niin $y'(x) = \cos x$ ja $y''(x) = -\sin x$. Sijoittamalla nämä tehtävän differentiaaliyhtälöön saadaan

$$-\sin x + a\sin x + \sin x = 0 \iff a\sin x = 0,$$

minkä pitää pätea kaikilla ratkaisuvälin kuuluvilla x. Tämä on mahdollista vain, kun $a = 0$. Siis tehtävän differentiaaliyhtälöllä on ratkaisuna sinifunktio vain, kun $a = 0$.

3 Tuntemattoman funktion argumentti ei selviä käytetyistä merkinnöistä, mutta niistä voi yleensä käytettyjen merkintöjen perusteella arvata minkä on tarkoitus olla argumentti. Esimerkiksi (a)-kohdan differentiaaliyhtälöllä tarkoitetaan käytännössä aina differentiaaliyhtälöä $y'(x) = x(y(x))^2$ jolloin tuntemattoman funktion y argumentti on x. Se voisi periaatteessa tarkoittaa myös esimerkiksi differentiaaliyhtälöä $y'(t) = x(y(t))^2$, missä x esiintyisi parametrina ja tuntemattoman funktion y argumentti olisi t.

(a) $y' = xy^2$ tarkoittaa (yleensä käytettyjen merkintöjen perusteella) differentiaaliyhtälöä $y'(x) = x(y(x))^2$. Tuntematon funktio on siis y ja sen argumentti x. Yhtälön kertaluku on 1.

(b) Tässä tuntematon funktio on z. Sen argumentti on epäoleellinen tehtävän ratkaisun kannalta, koska se ei esiinny differentiaaliyhtälössä. Se voi olla vaikkapa x, jolloin tehtävän yhtälö on siis $z(x)(1+(z'(x))^2)=1$. Yhtälön kertaluku on 1.

(c) Tässä tuntematon funktio on x. Sen argumentti on (yleensä käytettyjen merkintöjen perusteella) lähes varmasti t, jolloin differentiaaliyhtälö on siis $x'''(t)+tx'(t)=e^t$. Symboli t voisi periaatteessa olla myös yhtälössä esiintyvä parametri ja tuntemattoman funktion argumentti voisi olla vaikkapa y, jolloin differentiaaliyhtälö olisi $x'''(y)+tx'(y)=e^t$. Yhtälön kertaluku on 3.

Ainoastaan (c)-kohdan yhtälö on lineaarinen.

4. Ratkaistaan ensin differentiaaliyhtälö $y'=xy^2$. Kyseessä on ensimmäisen kertaluvun separoituva differentiaaliyhtälö. Koska $y^2=0 \Leftrightarrow y=0$, niin sen erikoisratkaisuksi saadaan $y(x)=0$, $x\in\,]-\infty,\infty[$. Muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int\frac{dy}{y^2}=\int x\,dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C \Leftrightarrow y(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}x^2+C},$$

missä $x\in I_C$ ja $C\in\mathbb{R}$. Jos $C>0$, niin ratkaisuväli I_C on $]-\infty,\infty[$. Jos $C=0$, niin ratkaisuväli I_C on joko $]-\infty,0[$ tai $]0,\infty[$. Jos $C<0$, niin ratkaisuväli I_C on jokin seuraavista $]-\infty,-\sqrt{-2C}[$, $]-\sqrt{-2C},\sqrt{-2C}[$ tai $]\sqrt{-2C},\infty[$.

(a) $y(1)=1$. Erikoisratkaisu ei toteuta tätä alkuehtoa. Siis on oltava

$$y(1)=\frac{-1}{\frac{1}{2}\cdot 1^2+C}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+C=-1 \Leftrightarrow C=-\frac{3}{2}.$$

Niinpä alkuehdon $y(1)=1$ toteuttava ratkaisu on

$$y(x)=\frac{-1}{\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}}=\frac{-2}{x^2-3},$$

$x\in\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$. (Ratkaisuväli valittiin sillä perusteella, että alkuehto on annettu pisteessä $1\in\,]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.)

(b) $y(1)=0$. Erikoisratkaisu toteuttaa tämän alkuehdon. Siksi ratkaisu on nyt $y(x)=0$, $x\in\,]-\infty,\infty[$.

5) <u>Ratkaisutapa I.</u>

$$y' + \frac{y}{x} = 1 \quad (TY)$$

on ensimmäisen kertaluvun lineaarinen epähomogeeninen differentiaaliyhtälö. Sitä vastaava homogeeninen yhtälö on

$$y' + \frac{y}{x} = 0, \quad (HY)$$

Verkkomonisteen esimerkin 5.9(iii) perusteella HY:n yleinen ratkaisu on (Huomaa, että se on separoituva yhtälö ja että $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_1$)

$$y(x) = Ce^{-\ln|x|} = Ce^{\ln|x|^{-1}} = C|x|^{-1},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja I on joko $]-\infty,0[$ tai $]0,\infty[$. Vaihtamalla tarvittaessa vakion C merkkiä HY:n ratkaisut voidaan kirjoittaa muotoon

$$y(x) = \frac{C}{x}.$$

Etsitään sitten TY:n yksittäisratkaisu vakion varioinnilla. Tehdään siis yrite $y(x) = C(x)x^{-1}$ TY:hyn. Tällöin $y'(x) = C'(x)x^{-1} - C(x)x^{-2}$. Sijoittamalla nämä TY:hyn saadaan

$$C'(x)x^{-1} - C(x)x^{-2} + C(x)x^{-2} = 1 \iff C'(x)x^{-1} = 1,$$

mikä pätee esimerkiksi, kun $C(x) = \frac{1}{2}x^2$. TY:n yksittäisratkaisuksi saadaan siis $y(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot x^{-1} = \frac{x}{2}$. (Myös tässä ratkaisuväli on joko $]-\infty,0[$ tai $]0,\infty[$. Differentiaaliyhtälöhän ei ole edes määritelty pisteessä $x=0$.)

TY:n yleinen ratkaisu saadaan, kun HY:n yleiseen ratkaisuun lisätään mikä tahansa TY:n ratkaisu (eli ns. yksittäisratkaisu), katso verkkomonisteen sivut 118–119. Niinpä TY:n yleinen ratkaisu on

$$y(x) = \frac{C}{x} + \frac{x}{2},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja I on joko $]-\infty,0[$ tai $]0,\infty[$. Alkuehdosta saadaan

$$y(1) = 0 \iff \frac{C}{1} + \frac{1}{2} = 0 \iff C = -\frac{1}{2}.$$

Niinpä tämän alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{x}{2}, \quad x \in]0,\infty[,$$

(Ratkaisuväli $]0,\infty[$ valittiin sillä perusteella, että alkuehto on annettu pisteessä $1 \in]0,\infty[$.)

<u>Ratkaisutapa II</u>. Tehtävän voi ratkaista myös sijoitusta $u(x) = y(x)/x$ apuna käyttäen, katso verkkomonisteen sivu 118.

<u>Ratkaisutapa III</u>. Kaikkein vaivattominta tämä yhtälö on kuitenkin ratkaista integroivan tekijän avulla (verkkomonisteen sivut 120-121). Integroivaksi tekijäksi voidaan nyt valita x (tai $|x|$, sillä $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ ja $e^{\ln|x|} = |x|$). Nyt

$$y' + \frac{y}{x} = 1 \quad | \cdot x \overset{(x\neq 0)}{\iff} xy' + y = x \iff \frac{d}{dx}(xy) = x$$

$$\iff xy = \frac{x^2}{2} + C \overset{(x\neq 0)}{\iff} y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x},$$

missä $C \in \mathbb{R}$, $x \in I$ ja ratkaisuväli I on joko $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$. Koska $y(1) = 0$, niin $C = -\frac{1}{2}$ ja

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}, \quad x \in]0, \infty[.$$

6

$$y' = 2y - y^2$$

on separoituva ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö. Koska $2y - y^2 = 0 \iff y(2-y) = 0 \iff y = 0$ tai $y = 2$, sillä on erikoisratkaisut $y(x) = 0$, $x \in]-\infty, \infty[$ ja $y(x) = 2$, $x \in]-\infty, \infty[$. Kumpikaan näistä ei toteuta alkuehtoa $y(1) = 1$. Siksi alkuehdon toteuttava ratkaisu saadaan kaavasta

$$\int \frac{dy}{y(2-y)} = \int dx.$$

osamurtohajotelma:

$$\frac{1}{y(2-y)} = {}^{2-y)}\frac{A}{y} + {}^{y)}\frac{B}{2-y} \iff 1 = A(2-y) + By$$

$$\iff A = \frac{1}{2} \text{ ja } B = \frac{1}{2}.$$

Siis alkuehdon toteuttava ratkaisu saadaan kaavasta

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{2-y} = \int dx \overset{(C_1 \in \mathbb{R})}{\iff}$$

$$\frac{1}{2}\ln|y| - \frac{1}{2}\ln|2-y| = x + C_1 \iff \ln\left|\frac{y}{2-y}\right| = 2x + 2C_1 \iff$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{y}{2-y}\right| = e^{2C_1} \cdot e^{2x} \overset{(C_2 = \pm e^{2C_1})}{\Leftrightarrow} \quad \frac{y}{2-y} = C_2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2C_2 e^{2x} - yC_2 e^{2x} \quad \Leftrightarrow \quad y(1 + C_2 e^{2x}) = 2C_2 e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{2C_2 e^{2x}}{1 + C_2 e^{2x}} = \frac{C_2 e^{2x}(2)}{C_2 e^{2x}(\frac{1}{C_2} e^{-2x} + 1)} = \frac{2}{\frac{1}{C_2} e^{-2x} + 1}$$

$$\overset{(C = \frac{1}{C_2})}{\Leftrightarrow} \quad y(x) = \frac{2}{1 + Ce^{-2x}},$$

missä $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($C = 0$ antaa itseasiassa erikoisratkaisun $y(x) = 2$, $x \in]-\infty, \infty[$). Alkuehto:

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1 + Ce^{-2}} = 1 \Leftrightarrow 2 = 1 + Ce^{-2} \Leftrightarrow Ce^{-2} = 1$$

$$\Leftrightarrow C = e^2.$$

Siis tämän alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x+2}}, \quad x \in]-\infty, \infty[.$$

Lisäksi $\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 + e^{-2x+2}} = \frac{2}{1 + 0} = 2.$