1. $f(x,y) = x^2 + 3x + y^2 - 4y$ ja $A = \{(x,y) \mid -2 \le x \le -1 \text{ ja } 0 \le y \le 5/2\}$.

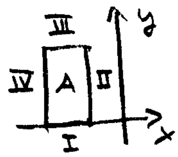
Koska $f: A \to \mathbb{R}$ on jatkuva, A on kompakti (se on suljettu ja rajoitettu) ja f on derivoituva A:n sisäpisteissä, voidaan käyttää verkkomonisteen sivulla 103 esitettyä kolmen askeleen menetelmää.

(1) Etsitään ne A:n (sisä)pisteet x, joissa $\nabla f(x,y) = \bar{0}$, ja lasketaan niitä vastaavat arvot.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2x + 3 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3/2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Koska $(-3/2, 2)$ on A:n (sisä)piste, saadaan ehdokas $f(-3/2, 2) = 9/4 - 9/2 + 4 - 8 = 9/4 - 18/4 - 16/4 = -25/4 = \underline{-6\tfrac{1}{4}}$.

(2) Etsitään f:n suurin ja pienin arvo A:n reunalla. Tämä voidaan jakaa neljään osaan seuraavasti.



I $(x,0)$, $-2 \le x \le -1$. Merkitään $g(x) = f(x,0) = x^2 + 3x$, $-2 \le x \le -1$. Tämän yhden muuttujan funktion $g(x)$ suurin ja pienin arvo välillä $-2 \le x \le -1$ löytyy syksyn kurssin tietojen perusteella joko derivaatan nollakohdista tai välin päätepisteistä.

$$g'(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff x = -3/2.$$

Ehdokkaat: $f(-3/2, 0) = g(-3/2) = 9/4 - 9/2 = -9/4 = \underline{-2\tfrac{1}{4}}$, $f(-2,0) = g(-2) = 4 - 6 = \underline{-2}$ ja $f(-1,0) = g(-1) = 1 - 3 = \underline{-2}$.

II $(-1, y)$, $0 \le y \le 5/2$. Merkitään $g(y) = f(-1,y) = -2 + y^2 - 4y$, $0 \le y \le 5/2$.

$$g'(y) = 0 \iff 2y - 4 = 0 \iff y = 2.$$

Ehdokkaat: $f(-1,2) = g(2) = \underline{-6}$, $f(-1,0) = g(0) = \underline{-2}$ ja $f(-1, 5/2) = g(5/2) = -2 + 25/4 - 20/2 = -8/4 + 25/4 - 40/4 = -23/4 = \underline{-5\tfrac{3}{4}}$.

III $(x, 5/2)$, $-2 \le x \le -1$. Merkitään $g(x) = f(x, 5/2) = x^2 + 3x - 15/4$, $-2 \le x \le -1$.

$$g'(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff x = -3/2.$$

Ehdokkaat: $f(-3/2, 5/2) = g(-3/2) = \underline{-6}$, $f(-2, 5/2) = g(-2) = \underline{-5\tfrac{3}{4}}$ ja $f(-1, 5/2) = g(-1) = \underline{-5\tfrac{3}{4}}$.

IV $(-2, y)$, $0 \le y \le 5/2$. Merkitään $g(y) = f(-2,y) = -2+y^2-4y$, $0 \le y \le 5/2$.

$$g'(y) = 0 \iff 2y-4=0 \iff y=2.$$

Ehdokkaat: $f(-2,2) = g(2) = \underline{-6}$, $f(-2,0) = g(0) = \underline{-2}$ ja $f(-2,5/2) = g(5/2) = \underline{-5\tfrac{3}{4}}$.

Valitsemalla näistä ehdokkaista suurin ja pienin saadaan f:n suurin ja pienin arvo joukon A reunalla, siis ne ovat $\underline{\underline{-2}}$ ja $\underline{\underline{-6}}$.

(3) Valitaan saaduista ehdokkaista suurin, joka on -2, ja pienin, joka on $-6\tfrac{1}{4}$. Nämä ovat f:n suurin ja pienin arvo joukossa A.

(2) Merkitään suorakulmaisen särmiön särmien pituuksia symboleilla x, y ja z. Tällaisen särmiön pinta-ala on $2xy+2xz+2yz$. Koska vaaditaan, että särmiön tilavuus on 8, niin $xyz = 8$, siis $z = \frac{8}{xy}$ ja särmiön pinta-ala on

$$2xy + 2x \cdot \frac{8}{xy} + 2y \cdot \frac{8}{xy} = 2xy + \frac{16}{y} + \frac{16}{x}.$$

Niinpä on etsittävä funktion $f:]0,\infty[\times]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy + \frac{16}{x} + \frac{16}{y}$ pienin arvo (mikäli sellainen on olemassa).

Koska f on derivoituva, niin sen lokaaleissa ääriarvokohdissa pätee:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2y - \frac{16}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{16}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ 2x - \frac{x^4}{4} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y = \frac{8}{x^2} \\ x(2 - \frac{x^3}{4}) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = 8 \\ y = \frac{8}{x^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$$

Siis funktion f ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on $(2,2)$. (Jos pidetään tunnettuna, että pienin arvo on olemassa, sen täytyy olla olla $f(2,2)$. Tämä johtuu siitä, että f:n määrittelyjoukko $]0,\infty[\times]0,\infty[$ on avoin, joten pienin arvo saavutetaan lokaalissa ääriarvokohdassa, kuitenkaan siitä, että jatkuvasti derivoituvalla kahden tai useamman muuttujan funktiolla on gradientin ainoassa nollakohdassa lokaali minimi, ei seuraa, että f:llä on olemassa pienin arvo, vaikka näin saattaa helposti erehtyä luulemaan. (Yhden muuttujan funktiolle vastaava päättely toimii.) Niinpä esimerkiksi

Lauseesta 4.24 ei ole nyt hyötyä, vaikka sen avulla voikin todistaa, että piste (2,2) on f:n lokaali minimikohta.)

Osoitetaan lopuksi, että f saa pisteessä (2,2) pienimmän arvonsa $f(2,2)=24$. Valitaan tätä varten kompakti joukko $A=[\frac{1}{2},32]\times[\frac{1}{2},32]$. Koska f on jatkuva, se saa kompaktissa joukossa A pienimmän arvon (Lause 4.27). Se saavutetaan joko A:n sisäpisteessä, jolloin $\nabla f(x,y)=\bar{0} \Leftrightarrow (x,y)=(2,2)$, tai A:n reunalla. Koska $f(2,2)=24$ ja A:n reunalla

$$f(x,y) = 2xy + \frac{16}{x} + \frac{16}{y} > 32,$$

sillä tällöin $16/x = 32$ tai $16/y=32$ tai $2xy \geq 32$, niin f:n pienin arvo A:ssa on 24. Tämä on myös f:n pienin arvo määrittelyjoukossaan $]0,\infty[\times]0,\infty[$, sillä myös joukossa $]0,\infty[\times]0,\infty[\setminus A$ funktio f saa vain lukua 32 suurempia arvoja. (Tämä nähdään samaan tapaan kuin vastaava A:n reunalla.)

Ylläolevan perusteella tehtävän edellyttämän suorakulmaisen särmiön jokaisen särmän pituus on 2. ($x=2$, $y=2$ ja $z=\frac{8}{2\cdot 2}=2$.)

③ $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2+xz$. Funktio f on neliömuoto, jota vastaava matriisi A on

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin johtavat alideterminantit ovat positiivisia:

$$d_1 = 1 > 0,\quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \quad \text{ja} \quad d_3 = \det A =$$

$$1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} > 0.$$

Niinpä Lauseen 3.57(i) perusteella A ja f ovat positiivisesti definiittejä. Erityisesti $f(0,0,0)=0$ ja $f(x,y,z)>0$ kaikilla $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$. Siis f:n pienin arvo $\mathbb{R}^3$:ssa on 0.

Vielä pitää selvittää f:n pienin arvo joukossa $A=\{(x,y,z) \mid 1\leq x\leq 2, -1\leq y\leq 3 \text{ ja } z=2\}$. Koska tässä joukossa z on aina 2, niin riittää selvittää funktion $g(x,y) = f(x,y,2) =$

$= x^2+y^2+8+2x$ pienin arvo joukossa $A^* = \{(x,y) \mid 1 \le x \le 2$ ja $-1 \le y \le 3\}$. Edelleen, koska $g(x,y) = x^2+y^2+8+2x \ge x^2+0^2+8+2x = g(x,0)$ kaikilla $(x,y) \in A^*$, niin riittää määrittää funktion $h(x) = g(x,0) = x^2+2x+8$ pienin arvo välillä $1 \le x \le 2$. Se saavutetaan joko derivaatan nollakohdassa tai päätepisteessä.

$$g'(x) = 0 \iff 2x+2=0 \iff x=-1 \notin]1,2[.$$

Siis ehdokkaat ovat $g(1) = 1+2+8 = 11$ ja $g(2) = 4+4+8 = 16$. Niinpä f:n pienin arvo joukossa A on 11.

(4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x+y$. Olkoot $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2+2y^2-3$, $B = g^{-1}(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ ja $f_B = f|B$. ($f|B$ on f:n rajoittuma B:hen eli muuten kuin f, mutta sen määrittelyjoukko on typistetty B:ksi.) Nyt voidaan soveltaa Lagrangen menetelmää (Lause 4.36), jonka mukaan f_B:n lokaalit ääriarvokohdat (x,y) toteuttavat:

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (0,0) \text{ jollakin } \lambda \in \mathbb{R} \\ g(x,y) = 0. \end{cases}$$

Ensimmäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja, koska $\nabla g(x,y) = (2x,4y) = \bar{0} \iff (x,y) = (0,0)$ ja $g(0,0) \ne 0$. Toisesta yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 1-\lambda 2x = 0 \\ 1-\lambda 4y = 0 \\ x^2+2y^2-3=0 \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2x = \frac{1}{\lambda} = 4y \\ x^2+2y^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 4y^2+2y^2=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

(*) Huomaa, että suunta "$\Rightarrow$" riittää ("$\iff$":n sijasta), koska joka tapauksessa etsitään ainoastaan ehdokkaita lokaaleiksi ääriarvokohdiksi. (Ei haittaa vaikka tässä kohdin saataisiin ylimääräisiäkin ehdokkaita.)

Siis ehdokkaat f_B:n lokaaleiksi ääriarvoiksi ovat $f_B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}/2 = -3\sqrt{2}/2$ ja $f_B(\sqrt{2}, \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} + \sqrt{2}/2 = 3\sqrt{2}/2$.

Koska $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja B on kompakti, niin f saa B:ssä suurimman ja pienimmän arvon (Lause 4.27). Se saa ne f_B:n lokaaleissa ääriarvokohdissa. Siksi f:n suurin ja pienin arvo joukossa B (eli lisäehdon $x^2+2y^2=3$ pätiessä) ovat $3\sqrt{2}/2$ ja $-3\sqrt{2}/2$.

5 Koska neliöön korotus $x \mapsto x^2$ (ja siten myös sen käänteisfunktio) neliöjuuri $x \mapsto \sqrt{x}$ ovat aidosti kasvavia välillä $[0,\infty[$, niin voidaan osoittaa, että etäisyys ja sen neliö saavat täsmälleen samoissa pisteissä suurimmat ja pienimmät arvot. Koska etäisyyden neliö tuottaa helpommat laskut, niin sitä käytetään alla ääriarvokohtien etsimisessä.

Pisteen (x,y) etäisyyden neliö origosta on $(x-0)^2+(y-0)^2 = x^2+y^2$. Merkitään $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$, $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^6+y^6-1$, $B = g^{-1}(0) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ ja $f_B = f|B$. ($f|B$ on f:n rajoittuma B:hen eli muuten kuin f, mutta sen määrittelyjoukko on typistetty B:ksi.) Nyt voidaan soveltaa Lagrangen menetelmää (Lause 4.36), jonka mukaan f_B:n lokaalit ääriarvokohdat (x,y) toteuttavat:

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} \nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = (0,0) \text{ jollakin } \lambda\in\mathbb{R} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Ensimmäisellä yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja, koska $\nabla g(x,y) = (6x^5, 6y^5) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$ ja $g(0,0) \neq 0$. Toisesta yhtälöryhmästä saadaan

$$\begin{cases} 2x - \lambda 6x^5 = 0 \\ 2y - \lambda 6y^5 = 0 \\ x^6+y^6-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai }$$

$$\begin{cases} 3x^4 = \frac{1}{\lambda} = 3y^4 \\ x^6+y^6 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} |x| = |y| \\ 2y^6 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \\ y=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \\ y=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

$$\text{tai } \begin{cases} x=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \\ y=-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \\ y=-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

Siis ehdokkaat f_B:n lokaaleiksi ääriarvoiksi ovat $f_B(0,\pm1) = f_B(\pm1,0) = 1$ ja $f((\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}) = \ldots = f(-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}, -(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}) = (\frac{1}{2})^{\frac{2}{6}} + (\frac{1}{2})^{\frac{2}{6}} = 2(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}$.

Koska $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja B on kompakti, f saa B:ssä suurimman ja pienimmän arvon. Se saa ne f_B:n lokaaleissa ääriarvopisteissä. Niinpä kysytyt lähimmät pisteet ovat $(0,\pm1)$ ja $(\pm1,0)$ sekä kaukaisimmat ovat $((\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}, (\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}), \ldots, (-(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}}, -(\frac{1}{2})^{\frac{1}{6}})$.

6 Kuten tehtävässä 5, lähintä pistettä etsittäessä voidaan etäisyyden sijasta käyttää etäisyyden neliötä. Tämä yksinkertaistaa laskuja. Origon $(0,0,0)$ etäisyyden neliö pisteestä (x,y,z) on $(0-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2 = x^2+y^2+z^2$. Olkoot $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $g_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_1(x,y,z)=x+y+z-1$, $g_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g_2(x,y,z)=2x-y+2z-1$, $B=g_1^{-1}(0)\cap g_2^{-1}(0) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g_1(x,y,z)=0$ ja $g_2(x,y,z)=0\}$ ja $f_B = f|B$. ($f|B$ on f:n rajoittuma joukkoon B eli muuten kuin f, mutta sen määrittelyjoukko on typistetty B:ksi.) Huomaa, että B on tehtävän tasojen leikkaussuora. Nyt voidaan soveltaa Lagrangen menetelmää (Lauseen 4.39 versio). Koska vektorit

$$\nabla g_1(x,y,z)=(1,1,1) \text{ ja } \nabla g_2(x,y,z)=(2,-1,2)$$

ovat lineaarisesti riippumattomat (eli $\alpha(1,1,1)+\beta(2,-1,2)=(0,0,0)$ vain kun $\alpha=\beta=0$), niin piste (x,y,z) voi olla funktion f_B lokaali ääriarvokohta vain, jos

$$\begin{cases}\nabla f(x,y,z)-\lambda_1\nabla g(x,y,z)-\lambda_2\nabla g(x,y,z)=\bar{0} \quad \text{jollakin } \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\\ g_1(x,y,z)=0\\ g_2(x,y,z)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x-\lambda_1-2\lambda_2=0\\ 2y-\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2z-\lambda_1-2\lambda_2=0\\ x+y+z-1=0\\ 2x-y+2z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\lambda_1/2+\lambda_2=z\\ 2x+y=1\\ 4x-y=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=z\\ 2x+y=1\\ 6x \quad =2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ z=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Siis f_B:n ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta on $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Leikkaussuora B ei ole kompakti, mutta siltä voidaan selvästi valita jana J niin, että $f(x,y,z) > f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ kaikilla $(x,y,z)\in B\setminus J$ sekä janan päätepisteissä. Koska jana J on kompakti, jatkuva funktio f saa siinä pienimmän arvon. Koska janan päätepisteet eivät tule kyseeseen, pienin arvo J:ssä saavutetaan f_B:n lokaalissa ääriarvokohdassa. Siis sen täytyy olla kohdassa $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Niinpä vastaus tehtävän kysymykseen on $\sqrt{f(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})} = \sqrt{3(\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.