① $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$.

$$\nabla f(x,y) = \bar{0} \iff \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6x(x-1) = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$$

Siis Lauseen 4.17 perusteella funktion f ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat (0,0) ja (1,1).

$D_1 f(x,y) = 6x^2 - 6y$, $\quad D_2 f(x,y) = -6x + 6y$,
$D_{11} f(x,y) = 12x$, $\quad D_{22} f(x,y) = 6$ ja
$D_{12} f(x,y) = -6$, $\quad D_f(x,y) = D_{11}f(x,y) D_{22} f(x,y) - (D_{12} f(x,y))^2$.

Koska $D_f(0,0) = 0 \cdot 6 - (-6)^2 = -36 < 0$, niin Lauseen 4.24 perusteella (0,0) ei ole f:n ääriarvokohta.

Koska $D_f(1,1) = 12 \cdot 6 - (-6)^2 = 36 > 0$ ja $D_{11} f(1,1) = 12 > 0$, niin Lauseen 4.24 perusteella (1,1) on f:n minimikohta. Siis pisteessä (1,1) funktio f saa lokaalin minimin $f(1,1) = 2 - 6 + 3 = -1$.

Funktiolla f ei ole suurinta eikä pienintä arvoa, sillä esimerkiksi $\lim_{x\to\infty} f(x,0) = \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty$ ja $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

② $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 y + y^2 z + z^2 - 2x$.

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2xy - 2 = 0 \\ x^2 + 2yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 + 2yz = 0 \\ z = -\frac{y^2}{2} \; (= -\frac{1}{2x^2}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^2 - \frac{1}{x^3} = 0 \quad | \cdot x^5 \\ z = -\frac{y^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ x^5 = 1 \\ z = -\frac{y^2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Siis Lauseen 4.17 perusteella funktion f ainoa mahdollinen ääriarvokohta on $(1,1,-\frac{1}{2})$.

Muodostetaan funktion f Hessen matriisi pisteessä $(1,1,-\frac{1}{2})$.

$D_1 f(x,y,z) = 2xy - 2$, $D_2 f(x,y,z) = x^2 + 2yz$, $D_3 f(x,y,z) = y^2 + 2z$ ja
$D_{11} f(x,y,z) = 2y$, $D_{22} f(x,y,z) = 2z$, $D_{33} f(x,y,z) = 2$,
$D_{12} f(x,y,z) = D_{21} f(x,y,z) = 2x$, $D_{23} f(x,y,z) = D_{32} f(x,y,z) = 2y$,
$D_{13} f(x,y,z) = D_{31} f(x,y,z) = 0$,

Siis $H(1,1,-\frac{1}{2})$ eli funktion f Hessen matriisi pisteessä $(1,1,-\frac{1}{2})$ on

$$\begin{bmatrix} D_{11}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{12}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{13}f(1,1,-\frac{1}{2}) \\ D_{21}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{22}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{23}f(1,1,-\frac{1}{2}) \\ D_{31}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{32}f(1,1,-\frac{1}{2}) & D_{33}f(1,1,-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koska $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2^2 = -6 \not\geq 0$ ($H(1,1,-\frac{1}{2})$:sta on jätetty pois kolmas rivi ja sarake), niin Lauseen 3.57(iii) perusteella $H(1,1,-\frac{1}{2}) \not\geq 0$.

Koska $\det[-2] = -2 \not\geq 0$ ($-H(1,1,-\frac{1}{2})$:sta on jätetty pois toinen rivi ja sarake sekä kolmas rivi ja sareke), niin Lauseen 3.57 kohtien (ii) ja (iii) perusteella $H(1,1,-\frac{1}{2}) \not\leq 0$.

Verkkomonisteen kaavan 4.23 perusteella $(1,1,-\frac{1}{2})$ ei ole lokaali minimikohta (maksimikohta), koska tällöin pitäisi olla $H(1,1,-\frac{1}{2}) \geq 0$ ($H(1,1,-\frac{1}{2}) \leq 0$). Siis funktiolla f ei ole lokaaleja ääriarvoja.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x-y)^2 - x^4 - y^4$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} 2(x-y) - 4x^3 = 0 \\ -2(x-y) - 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y) - 4x^3 = 0 \\ -4x^3 - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(x-y) - 4x^3 = 0 \\ y^3 = -x^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-y) - 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x - 4x^3 = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x(1-x^2) = 0 \\ y = -x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$$

Siis Lauseen 4.17 perusteella ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat $(0,0)$, $(-1,1)$ ja $(1,-1)$. Tutkitaan tilannetta lisää Lauseen 4.24 avulla.

Nyt
$$D_f(x,y) = D_{11}f(x,y)D_{22}f(x,y) - (D_{12}f(x,y))^2 = (2-12x^2)(2-12y^2) - (-2)^2.$$

Koska $D_f(-1,1) = D_f(1,-1) = 96 > 0$ ja $D_{11}f(-1,1) = D_{11}f(1,-1) = -10 < 0$, f saa Lauseen 4.24 perusteella pisteissä $(-1,1)$ ja $(1,-1)$ lokaalit maksimiarvot $f(-1,1) = 2$ ja $f(1,-1) = 2$.

Koska $D_f(0,0) = 0$, Lauseen 4.24 avulla ei voi selvittää, onko $(0,0)$ lokaali ääriarvokohta. Pisteen $(0,0)$ jokaisessa ympäristössä[1] $U_\delta(0,0)$, $\delta > 0$, on muotoa (t,t) ja $(t,-t)$ olevia pisteitä, kunhan $t > 0$ on kyllin pieni. Lisäksi
$$\begin{cases} f(0,0) = 0, \\ f(t,t) = (t-t)^2 - t^4 - t^4 = -2t^4 < 0 \quad \text{ja} \\ f(t,-t) = (t+t)^2 - t^4 - (-t)^4 = 4t^2 - 2t^4 = 2t^2(2-t^2) > 0, \end{cases}$$
kun $0 < t < \sqrt{2}$. Siis pisteen $(0,0)$ jokaisessa ympäristössä $U_\delta(0,0)$, $\delta > 0$, f saa sekä lukua $f(0,0) = 0$ pienempiä että suurempia arvoja. Niinpä piste $(0,0)$ ei ole f:n lokaali ääriarvokohta.

4. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{xyz}$. Lauseen 4.17 perusteella f:n mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat löytyvät gradientin nollakohdista.
$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} yz e^{xyz} = 0 \\ xz e^{xyz} = 0 \\ xy e^{xyz} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yz = 0 \\ xz = 0 \\ xy = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Siis mahdollisessa lokaalissa ääriarvokohdassa (x_0, y_0, z_0) ainakin kaksi luvuista x_0, y_0 ja z_0 on nolla. Tällaisen pisteen jokaisessa ympäristössä $U_\delta(x_0, y_0, z_0)$, $\delta > 0$, xyz saa sekä positiivisia, että negatiivisia arvoja, jolloin $f(x,y,z)$ saa sekä lukua $f(x_0,y_0,z_0) = e^0 = 1$ suurempia että pienempiä arvoja. Niinpä f:llä ei ole lokaaleja ääriarvoja.

---

(1) Kun $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ja $\delta > 0$, niin $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \delta\}$.

5. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (y^2-2x)(5y^2-x) = 5y^4 - xy^2 - 10xy^2 + 2x^2 = 5y^4 - 11xy^2 + 2x^2$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} -11y^2 + 4x = 0 \\ 20y^3 - 22xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11}{4}y^2 \\ 20y^3 - \frac{121}{2}y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{11}{4}y^2 \\ (20 - \frac{121}{2})y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$$

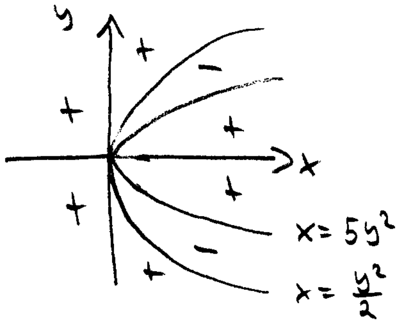
Siis Lauseen 4.17 perusteella piste $(0,0)$ on ainoa mahdollinen lokaali ääriarvokohta.[1] Se ei kuitenkaan ole ääriarvokohta, sillä

1° $f(0,0) = 0$

2° $f(x,y) < 0$, kun $\frac{y^2}{2} < x < 5y^2$,

3° $f(x,y) > 0$, kun $x < 0$, ja

4° kohtien 2° ja 3° tyyppisiä pisteitä on jokaisessa pisteen $(0,0)$ ympäristössä $U_\delta(0,0)$, $\delta > 0$.



$f(x,y)$ on negatiivinen käyrien $x = y^2/2$ ja $x = 5y^2$ välissä ja muualla, paitsi näillä käyrillä, positiivinen.

6. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2y - 12z$.

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 4y + 2x + 2 = 0 \quad \leftarrow (-1) \\ 6z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2y + 2 = 0 \\ 6z - 12 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2. \end{cases}$$

---

(1) Lausetta 4.24 ei voi käyttää nyt apuna, sillä $D_f(0,0) = 0$.

Muodostetaan f:n Hessen matriisi $H(x,y,z)$:

$D_1 f(x,y,z) = 2x+2y$, $D_2 f(x,y,z) = 4y+2x+2$, $D_3 f(x,y,z) = 6z-12$,
$D_{11} f(x,y,z) = 2$, $D_{22} f(x,y,z) = 4$, $D_{33} f(x,y,z) = 6$ ja
$D_{12} f(x,y,z) = D_{21} f(x,y,z) = 2$, $D_{23} f(x,y,z) = D_{32} f(x,y,z) = 0$,
$D_{13} f(x,y,z) = D_{31} f(x,y,z) = 0$,

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tämän matriisin johtaville alideterminanteille pätee kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$d_1 = 2 > 0, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 2\cdot 2 = 4 > 0 \text{ ja } d_3 = \det H(x,y,z)$$
$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 6 - 2\cdot 2\cdot 6 = 24 > 0.$$

Niinpä Lauseiden 4.12(ii) ja 3.57(i) perusteella f on vahvasti konveksi (määritelmäjoukossaan $\mathbb{R}^3$). Koska lisäksi $\nabla f(1,-1,2) = \bar{0}$, niin Lauseen 4.19 perusteella f:n pienin arvo (määrittelyjoukossaan $\mathbb{R}^3$) on $f(1,-1,2) = 1+2+12-2-2-24 = -13$.