Matemaattisen analyysin jatkokurssi, harj. 1, 29.1.2010, ratkaisuja.

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{kun } x > 1, \\ 3, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \text{ ja} \\ x^2+3, & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$

Määritetään aluksi kaikki f:n integraalifunktiot $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eli sellaiset funktiot, joiden derivaatat ovat f. Siksi täytyy olla

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1, & \text{kun } x > 1, \\ 3x + C_2, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \text{ ja} \\ \frac{1}{3}x^3 + 3x + C_3, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

missä C_1, C_2 ja C_3 ovat vakioita. Nyt on vielä valittava vakiot C_1, C_2 ja C_3 niin, että F on derivoituva myös pisteissä 0 ja 1 sekä $F'(0) = f(0)$ ja $F'(1) = f(1)$.

Koska F on derivoituva pisteissä 0 ja 1, se on jatkuva näissä pisteissä. Siksi

$$C_3 = F(0) = \lim_{x \to 0-} F(x) = \lim_{x \to 0+} F(x) = C_2 \text{ ja}$$

$$3 + C_2 = F(1) = \lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x) = \frac{1}{2} + 2 + C_1.$$

Siis on oltava $C_3 = C_2$ ja $C_2 = C_1 - \frac{1}{2}$, joten

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + C, & \text{kun } x > 1, \\ 3x + C - \frac{1}{2}, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \text{ ja} \\ \frac{1}{3}x^3 + 3x + C - \frac{1}{2}, & \text{kun } x \leq 0, \end{cases}$$

missä C on vakio. Lisäksi vaaditaan, että $F(-1) = -3$. Siis $-\frac{1}{3} - 3 + C - \frac{1}{2} = -3$ eli $C = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$. Niinpä funktio

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{6} & \text{kun } x > 1 \\ 3x + \frac{1}{3} & \text{kun } 0 < x \leq 1, \text{ ja} \\ \frac{1}{3}x^3 + 3x + \frac{1}{3} & \text{kun } x \leq 0. \end{cases}$$

On ainoa mahdollinen ehdon $F(-1) = -3$ toteuttava integraalifunktio. Siitä, että f on jatkuva ja jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio, seuraa, että löydetty ainoa ehdokas F on f:n ehdon $F(-1) = -3$ toteuttava integraalifunktio. (Jos tätä tietoa ei käytettäisi, täytyisi vielä tarkistaa, että F on derivoituva myös pisteissä 0 ja 1 ja että $F'(0) = f(0)$ ja $F'(1) = f(1)$.)

2) $\int (x^2+x+1)^2 dx = \int (x^4+x^3+x^2+x^3+x^2+x+x^2+x+1)\,dx =$
$\int (x^4+2x^3+3x^2+2x+1)\,dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 + x + C,$

missä C on vakio.

$$\int \frac{4x+2}{x^2+x+1}\,dx = 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = 2\int \frac{D(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\,dx$$

$$\overset{(*)}{=} 2\ln|x^2+x+1| + C \overset{(**)}{=} 2\ln(x^2+x+1) + C,$$

missä C on vakio.

(*) verkkomonisteen kohdan 1.6 kaava (15).
(**) $x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2 + 1 > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

$$\int (2x+1)(x^2+x+1)^{10} dx = \int (D(x^2+x+1))(x^2+x+1)^{10} dx$$

$\overset{(*)}{=} \frac{1}{11}(x^2+x+1)^{11} + C,$ missä C on vakio.

(*) verkkomonisteen kohdan 1.6 kaava (14).

3) $\int x e^{-2x} dx \overset{(*)}{=} x(-\frac{1}{2}e^{-2x}) - \int 1\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2x})\,dx$

$= -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}e^{-2x}) + C$

$= -(\frac{x}{2}+\frac{1}{4})e^{-2x} + C,$ missä C on vakio.

(*) osittaisintegrointi. Lisäksi ratkaisussa käytetään sitä tietoa (verkkomonisteen kohdan 1.6 kaava (16)), että $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$. Siksi $\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int a e^{ax} dx = \frac{1}{a}(e^{ax} + C_1) = \frac{1}{a}e^{ax} + C$, missä a, C_1 ja $C = C_1/a$ ovat vakioita.

$$\int x^2 \sin(2x) \overset{(*)}{=} x^2\left(-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 2x\left(-\tfrac{1}{2}\cos(2x)\right)dx$$
$$= -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \int x\cos(2x) \overset{(*)}{=} -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + x\left(\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right)$$
$$- \int 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\sin(2x)\right)dx = -\frac{x^2}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C,$$

missä C on vakio.

(*) osittaisintegrointi. Jos ei huomaa, että $\sin(2x)$:n integraalifunktio on $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$, sen voi laskea sijoituksen avulla seuraavasti: $\int \sin(2x)dx \overset{(**)}{=} \int \frac{1}{2}\sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos(t) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C$. (**) sij. $2x = t$, $dx = \frac{1}{2}dt$. Vastaavasti saadaan: $\int \cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$.

(4) Huom. Merkintää $\int f(x)dx$ käytetään perinteisesti hieman epätäsmällisesti. Tarkkaan ottaen sillä pitäisi tarkoittaa f:n integraalifunktioiden joukkoa. Tällaisille joukoille pitäisi myös määritellä laskutoimituksia. Käytännössä tämä on kuitenkin tarpeetonta. Tätä epätäsmällisyyttä voidaan kompensoida sopimalla, että $\int f(x)dx$ tarkoittaa eri paikoissa mahdollisesti eri integraalifunktiota. Erityisesti tällöin $\int f(x)dx - \int f(x)dx = C$, missä C on vakio.

$$\int e^{2x}\cos x\,dx \overset{\text{os.int.}}{=} e^{2x}\sin x - \int 2e^{2x}\sin x\,dx$$
$$\overset{\text{os.int.}}{=} e^{2x}\sin x - 2e^{2x}(-\cos x) + \int 4e^{2x}(-\cos x)\,dx.$$

Siis

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x - 4\int e^{2x}\cos x\,dx.$$

Lisätään tämän yhtälön molemmille puolille $4\int e^{2x}\cos x\,dx$. Tällöin saadaan

$$5\int e^{2x}\cos x\,dx = e^{2x}\sin x + 2e^{2x}\cos x + C_1,$$

missä C_1 on vakio (katso alun huomautus). Niinpä

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \left(\tfrac{1}{5}\sin x + \tfrac{2}{5}\cos x\right)e^{2x} + C,$$

missä C on vakio.

(5) Huomaa, että $2x^2+x+1 = 2(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}) = 2((x+\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{2}) > 0$ kaikilla $x\in\mathbb{R}$. Koska integroitavan rationaalifunktion osoittajan aste on suurempi (tai yhtäsuuri) kuin nimittäjän aste, jaetaan ensin jakokulmassa,

$$\begin{array}{r|l} & x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4} \\ \hline 2x^2+x+1 & 2x^4 \\ & 2x^4+x^3+x^2 \\ \hline & -x^3-x^2 \\ & -x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x \\ \hline & -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x \\ & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4}x+\frac{1}{4} \end{array}$$

Siis
$$\frac{2x^4}{2x^2+x+1} = x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{2x^2+x+1}$$
$$= x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\cdot\frac{4x+\frac{4}{3}}{2x^2+x+1}$$
$$= x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\cdot\frac{4x+1}{2x^2+x+1}+\frac{3}{16}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{2x^2+x+1}.$$

Nyt
$$\int\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}\cdot\frac{4x+1}{2x^2+x+1}\right)dx = \int\left(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)dx+\frac{3}{16}\int\frac{D(2x^2+x+1)}{2x^2+x+1}dx$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}\ln(\underbrace{|2x^2+x+1|}_{=2x^2+x+1})+C$$

(*) Verkkomonisteen kohdan 1.6 kaava (15)

Ja
$$\int\frac{3}{16}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{2x^2+x+1}dx = \frac{1}{32}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{32}\int\frac{dx}{\frac{7}{16}((\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}})^2+1)}$$
$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{32}\cdot\frac{16}{7}\int\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}dt \overset{(***)}{=} \frac{1}{8\sqrt{7}}\int\frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{8\sqrt{7}}\arctan(t)+C$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

(*) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} = (x+\frac{1}{4})^2-(\frac{1}{4})^2+\frac{1}{2} = (x+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}$
$= \frac{7}{16}(\frac{16}{7}(x+\frac{1}{4})^2+1) = \frac{7}{16}((\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}})^2+1)$.

(**) sijoitetaan $\begin{cases}\frac{4}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}} = t \\ dx = \frac{\sqrt{7}}{4}dt.\end{cases}$

(***) Verkkomonisteen kohdan 1.6 kaava (13).

vastaus: $\int \frac{2x^4}{2x^2+x+1}\,dx =$

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}\ln(2x^2+x+1) + \frac{1}{8\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

6 osamurtohajotelma:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{\overbrace{A}^{(x-2)(x+3)}}{x-1} + \frac{\overbrace{B}^{(x-1)(x+3)}}{x-2} + \frac{\overbrace{C}^{(x-1)(x-2)}}{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A(x^2+x-6) + B(x^2+2x-3) + C(x^2-3x+2)}{(x-1)(x-2)(x+3)} \Leftrightarrow$$

$$1 \equiv (A+B+C)x^2 + (A+2B-3C)x + (-6A-3B+2C) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-3C=0 \quad (-1) \\ -6A-3B+2C=1 \quad (6) \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-4C=0 \\ 3B+8C=1 \quad (-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ B-4C=0 \\ 20C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B-C=-\frac{4}{20}-\frac{1}{20}=-\frac{5}{20}=-\frac{1}{4} \\ B=4C=\frac{4}{20}=\frac{1}{5} \\ C=\frac{1}{20}. \end{cases}$$

(*) Ylin yhtälö -1:llä kerrottuna lisätään keskimmäiseen, vastaavasti 6:lla kerrottuna se lisätään alimpaan.

Siis

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \int \left(-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{5}\ln|x-2| + \frac{1}{20}\ln|x+3| + C,$$

missä C on vakio ja $x \in I$ ja I on jokin väleistä $]-\infty,-3[$, $]-3,1[$, $]1,2[$ tai $]2,\infty[$.