5. Differentiaaliyhtälöt

Differentiaaliyhtälöllä (lyh. DY) tarkoitetaan yhtälöä, joka koskee tuntematonta funktiota $y : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ väli) ja sen derivaattoja:

5.1 Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^{n+2}$ avoin joukko, $I \subset \mathbb{R}$ väli, $I \subset \mathrm{pr}_1(A)$ ja $F : A \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Muotoa

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{5.2}$$

olevaa yhtälöä sanotaan *(kertaluvun n) differentiaaliyhtälöksi*, kun se tulkitaan seuraavasti: On etsittävä sellaisia välillä I n kertaa derivoituvia funktioita $y : I \to \mathbb{R}$ (DY:n 5.2 *ratkaisut*), että y ja sen derivaatat $y', \ldots, y^{(n)}$ toteuttavat ehdon

$$F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \quad \forall x \in I. \tag{5.3}$$

Kertalukua n olevan DY:n *yleinen ratkaisu*

$$y = y(x, C_1, \ldots, C_n) : I \to \mathbb{R} \quad (C_1, \ldots, C_n \text{ vakioita}) \tag{5.4}$$

sisältää n kappaletta reaalisia *integroimisvakioita* $C_1, \ldots, C_n$, joille voi sopivilta väleiltä valita äärettömän monia arvoja kullekin. Konkreettiset $C_1, \ldots, C_n$ antavat *yksittäisratkaisun* ja ratkaisut, joita yleinen ratkaisu (5.4) ei (ehkä) tavoita, ovat *erikoisratkaisuja*. Jos $y^{(n)}$ voidaan ratkaista yhtälöstä (5.2), saadaan DY (5.2) *normaalimuotoiseksi*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5.5}$$

DY:n (5.2) tai (5.5) ratkaisufunktioiden $y : I \to \mathbb{R}$ kuvaajat ovat nimeltään DY:n *integraalikäyriä*. *Alkuarvotehtävällä* (AAT) tarkoitetaan sellaisen ratkaisun y etsimistä, joka toteuttaa n kappaletta (n on DY:n kertaluku (kl)) muotoa

$$y(x_0) = C_0, y'(x_0) = C_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = C_{n-1} \tag{5.6}$$

($C_0, \ldots, C_{n-1} \in \mathbb{R}$ vakioita) olevia *alkuehtoja*. *Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseet* (OY-lauseet) koskevat AAT:n ratkaisun olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä tiettyjen ehtojen vallitessa.

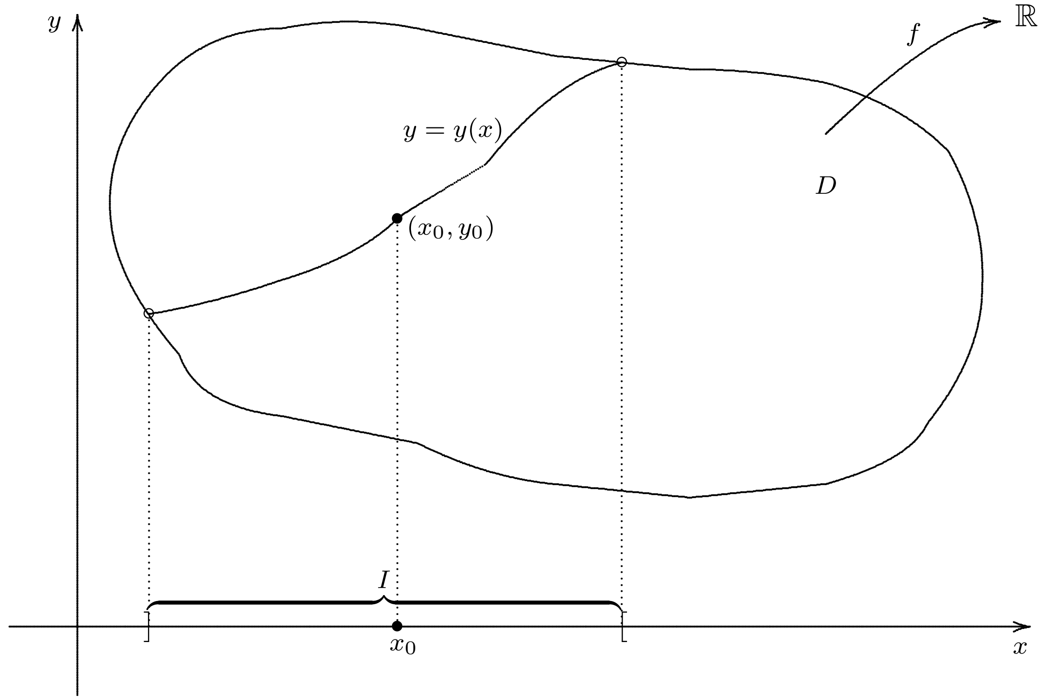
5.7 Esimerkki. (i) $y' = f(x)$ on 1. kl:n normaalimuotoinen DY, joka ratkeaa suoraan integroimalla: $y = \int f(x)dx$ jokaisella välillä I, jolla f on jatkuva. Tämän DY:n integraalikäyriä on tarkasteltu kohdassa 1.8.

(ii) $y'' = f(x)$, 2. kl:n DY, ratkeaa kahdella peräkkäisellä integroinnilla, jotka tuottavat kaksi integroimisvakiota.

(iii) **DY:n $y' = f(x, y)$ OY-lause**:

Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja yhtenäinen ja $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jolla myös $D_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ on jatkuva. Olkoon $(x_0, y_0) \in D$. Tällöin AAT:llä $y' = f(x, y)$, $y(x_0) =$

y_0, on yksikäsitteinen *maksimaalinen* (väli I maksimaalinen) ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$, niin että vastaava integraalikäyrä $y = y(x)$ kulkee alueessa D pisteen (x_0, y_0) kautta ja D:n reunalta reunalle ja väli I on $\mathrm{pr}_1(D)$:hen sisältyvä avoin väli.
Kuva tilanteesta



Eri integraalikäyrät peittävät kertaalleen D:n kulkien aina reunalta reunalle. (Esim. tasossa $D = \mathbb{R}^2$ "reuna" on "äärettömän kaukainen piste".) Käytännössä ratkaisun tarkka lauseke ei yleensä löydy.

Separoituvat 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöt

Ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoinen DY $y' = f(x, y)$ on *separoituva*, jos $f(x, y)$ on muotoa $f(x, y) = g(x)h(y)$, x:n funktion ja y:n funktion tulo. Separoituvat DY:t ratkeavat suoralla integroinnilla (jos tämä osataan tehdä):
(5.8)

$$y' = g(x)h(y) \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \overset{h(y)\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx.$$

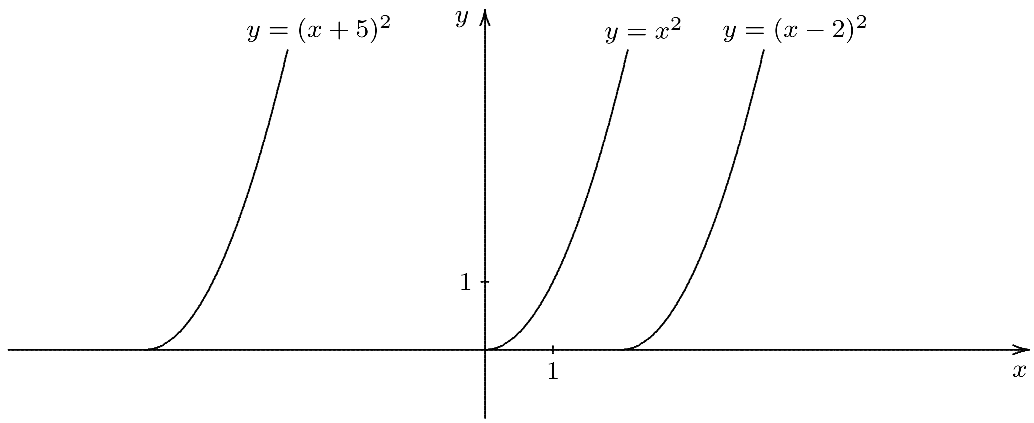
Koska (5.8):ssa jouduttiin laskun kuluessa tekemään rajoitus $h(y) \neq 0$, on ehkä kadotettu ratkaisufunktioita y, joille $h(y(x)) = 0$ jollain x. Tällaisia ovat itse asiassa vain *erikoisratkaisut* $y \equiv C$, *missä* $h(C) = 0$, sillä OY-lauseen 5.7 (iii) nojalla pisteiden (x_0, C) kautta kulkee vain yksi integraalikäyrä.

5.9 Esimerkki. (i) $y' = 2\sqrt{y}$ on separoituva ($h(y) = 2\sqrt{y}$, $g(x) = 1$) ja saamme ratkaisun integroimalla:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx \ \Leftrightarrow \ \sqrt{y} = x + C \ (\textit{yksi} \text{ integroimisvakio}) \ \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{y = y(x) = (x+C)^2,\ x \geq -C,}} \quad \text{tai} \quad \underline{\underline{y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (erikoisratkaisu)}}}.$$

Tässä ehto $x \geq -C$ näyttää ensi silmäyksellä oudolta, mutta on tarkemmin analysoitaessa välttämätön.
Kuva integraalikäyristä:



DY $y' = 2\sqrt{y}$ täyttää alueessa $D = \mathbb{R} \times]0, \infty[$ OY-lauseen 5.7 (iii) ehdot, joten tämän alueen kunkin pisteen kautta kulkee vain yksi integraalikäyrä (nyt reunalta $\mathbb{R} \times \{0\}$ "äärettömän kaukana sijaitsevaan reunapisteeseen"). Täten $y = (x+C)^2$, $x \in \mathbb{R}$, ei voi olla ratkaisu, koska käyrät tällöin leikkaisivat toisiaan. Todella, jos sallittaisiin myös $x < -C$, tulisi $y'(x) < 0$ vastoin sitä, että $y' = 2\sqrt{y} \geq 0$ aina. (Ilmiön syy on, että $\sqrt{\ }$ on sovittu olevan aina ≥ 0. Tällaiset seikat voivat joskus olla vaikeita havaita ilman esim. OY-lauseen antamaa näkemystä tilanteesta.)

(ii) AAT: $y' = e^{-y}x$, $y(0) = 0$

Ratkaisu.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}x \ \Leftrightarrow \ \int e^y dy = \int x dx \ \Leftrightarrow \ e^y = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Sijoitus $y(0) = 0 \ \Rightarrow \ e^0 = C \ \Rightarrow \ C = 1$, joten saadaan

$$e^y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + 1)}}.$$

Voisi myös käyttää määrättyjä integraaleja, jolloin AAT:n ratkaisun saisi suoraan:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}x,\ \overset{y_0}{y}(\overset{x_0}{0}) = \overset{}{0} \ \Leftrightarrow \ \int_{0=y_0}^{y} e^y dy = \int_{0=x_0}^{x} x dx \ \Leftrightarrow \ \Big/_{0}^{y} e^y = \Big/_{0}^{x} \frac{1}{2}x^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ e^y - 1 = \frac{1}{2}x^2 - 0 \ \Leftrightarrow \ \underline{\underline{y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + 1)}}.$$

(iii) $y' + f(x)y = 0,\ f(x) = F'(x)\ \forall x \in I$ (lineaarinen 1. kl:n homogeeninen DY, näitä käsitellään pian) on separoituva:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y \overset{y\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{y} = -f(x)dx \Leftrightarrow \ln|y| = -F(x) + C_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^{-F(x)+C_1} = e^{C_1}e^{-F(x)} \overset{C_2=\pm C_1}{\Leftrightarrow} y = C_2e^{-F(x)}\ (C_2 \neq 0)$$

ja sallimalla tässä lopuksi vielä $C_2 = 0$ saadaan mukaan erikoisratkaisu $y \equiv 0$. Yleinen ratkaisu on siis

$$\underline{\underline{y = Ce^{-F(x)}}} \quad (x \in I,\ C \in \mathbb{R}).$$

(iv) $y' = ky$ (eksponentiaalisen kasvun malli) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{y = Ce^{kx}}}$ (sovelletaan äskeistä, $f(x) = -k$, $F(x) = -kx$).

(v) (Logistisen kasvun malli) $y' = \epsilon y - ky^2$ ($\epsilon > 0$, $k > 0$).
Tämäkin DY on separoituva: $h(y) = y(\epsilon - ky)$ ja $g(x) = 1$. Jaetaan aluksi $\frac{1}{h(y)}$ osamurtoihin:

$$\frac{1}{y(\epsilon - ky)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{\epsilon - ky} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{\epsilon} \\ B = \frac{k}{\epsilon}. \end{cases}$$

Ratkaistaan DY integroimalla, kun $y \neq 0$ ja $y \neq \frac{\epsilon}{k}$:

$$\frac{dy}{dx} = y(\epsilon - ky) \Leftrightarrow \frac{dy}{y(\epsilon - ky)} = dx \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{\epsilon}\frac{1}{y} + \frac{k}{\epsilon}\frac{1}{\epsilon - ky} \right) dy = \int dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon}\ln|y| - \frac{1}{\epsilon}\ln|\epsilon - ky| = x + C_1 \overset{C_2=\epsilon C_1}{\Leftrightarrow} \ln\left|\frac{y}{\epsilon - ky}\right| = \epsilon x + C_2 \overset{C_3=e^{C_2}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{y}{\epsilon - ky}\right| = C_3e^{\epsilon x} \overset{C=\pm C_3}{\Leftrightarrow} \frac{y}{\epsilon - ky} = Ce^{\epsilon x} \Leftrightarrow y = Ce^{\epsilon x}(\epsilon - ky) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(1 + kCe^{\epsilon x}) = \epsilon Ce^{\epsilon x} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \frac{\epsilon Ce^{\epsilon x}}{1 + kCe^{\epsilon x}}}}.$$

Lisäksi erikoisratkaisut $\underline{\underline{y \equiv 0 \text{ ja } y \equiv \frac{\epsilon}{k}}}$.

AAT:n $y' = \epsilon y - ky^2$, $y(0) = a > 0$, ratkaisuksi saadaan $y = \frac{\epsilon}{k}$, jos $a = \frac{\epsilon}{k}$ ja

$$y = \frac{\epsilon(\frac{a}{\epsilon - ak})e^{\epsilon x}}{1 + k(\frac{a}{\epsilon - ak})e^{\epsilon x}} = \frac{a\epsilon}{ak + (\epsilon - ak)e^{-\epsilon x}}, \text{ jos } a \neq \frac{\epsilon}{k}.$$

Kaikki nämä ratkaisufunktiot toteuttavat ehdon $\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{\epsilon}{k}$, joten toisin kuin eksponentiaalisen kasvun tapauksessa kasvulla on nyt raja. (Jos $a > \frac{\epsilon}{k}$, pitää kasvun sijaan puhua vähenemisestä, sillä tällöin

$$y'(0) = \epsilon y(0) - ky(0)^2 = a\epsilon - ka^2 = a(\epsilon - ka) < 0 \Rightarrow y'(x) < 0\ \forall x \in [0, \infty[$$

OY-lauseen nojalla (päättele tämä!) ja saman voisi todeta y:n lausekkeestakin derivoimalla.) Tällaisissa kasvumalleissa muuttuja x on usein aika.

Tietyt yhtälötyypit voidaan aina palauttaa separoituvan DY:n tapaukseen:

$$y' = f(ax + by + c) \text{ sijoituksella } u = ax + by + c \tag{5.10}$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ sijoituksella } u = \frac{y}{x}. \tag{5.11}$$

5.12 Esimerkki. i) $y' = (x + y)^2$. Sijoitetaan $u(x) = x + y(x)$, jolloin $u'(x) = 1 + y'(x)$ ja saadaan separoituva DY $u' = 1 + u^2$, jonka ratkaisu on helppo:

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \Leftrightarrow \frac{du}{1 + u^2} = dx \Leftrightarrow \int \frac{du}{1 + u^2} = \int dx \Leftrightarrow \overline{\text{arc}} \tan u = x + C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \tan(x + C) \quad (x + C \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{eli} \quad -\frac{\pi}{2} - C < x < \frac{\pi}{2} - C).$$

Sijoitetaan takaisin $y(x) = u(x) - x$:

$$y(x) = u(x) - x = \tan(x + C) - x \quad (-\frac{\pi}{2} - C < x < \frac{\pi}{2} - C).$$

ii) $y' = \dfrac{y + x}{x} = \dfrac{y}{x} + 1$. Sijoitetaan $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$, jolloin $y(x) = xu(x)$ ja $y'(x) = u(x) + xu'(x)$. Saadaan separoituva DY $u + xu' = u + 1$ eli $xu' = 1$ ja sen ratkaisu

$$xu' = 1 \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \int du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u = \ln|x| + C \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{y(x)}} = xu(x) = \underline{\underline{x \ln|x| + Cx}} = \begin{cases} x \ln x + Cx \text{ väleillä } I \subset]0, \infty[\\ x \ln(-x) + Cx \text{ väleillä } I \subset]-\infty, 0[\end{cases} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Lineaariset differentiaaliyhtälöt

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja olkoot $p_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n - 1)$ ja $q : I \to \mathbb{R}$ jatkuvia. Differentiaaliyhtälöä

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \tag{5.13}$$

sanotaan *lineaariseksi*, sillä kuvaus

$$y \mapsto L(y) = y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y$$

on lineaarikuvaus $L : C^n(I) \to C^0(I)$ I:ssä n kertaa jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruudelta $C^n(I)$ jatkuvien jatkuvien funktioiden avaruudelle $C^0(I)$, koska selvästi

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \quad \text{ja} \quad L(ay) = aL(y) \quad \forall y_1, y_2, y \in C^n(I),\ a \in \mathbb{R}.$$

Lineaarialgebran yleisperiaatteen nojalla *täydellisen yhtälön* (TY) $L(y) = q$ ratkaisuavaruus saadaan siirtämällä *homogeeniyhtälön* (HY) $L(y) = 0$ ratkaisuavaruutta (L:n ydin)

$$\operatorname{Ker} L = L^{-1}(0) = \{y \mid L(y) = 0\} \subset C^n(I)$$

täydellisen yhtälön jollain yksittäisratkaisulla z. Jos $L(z) = q$, niin pätee

$$\{y \mid L(y) = q\} = z + \operatorname{Ker} L = \{z + u \mid L(u) = 0\} \tag{5.14}$$

Perustelu: Jos $L(y) = q$, niin $y = z + (y - z)$ ja $L(y - z) = L(y) - L(z) = q - q = 0$, Jos $L(u) = 0$, niin $L(z + u) = L(z) + L(u) = q + 0 = q$. Siis

TY:n yleinen ratkaisu = HY:n yleinen ratkaisu + TY:n yksittäisratkaisu

Täydellisen yhtälön (5.13) ratkaisuavaruus saadaan siis siirtämällä ääretönulotteisen vektoriavaruuden $C^n(I)$ n-ulotteien aliavaruus $\operatorname{Ker} L$ täydellisen yhtälön yksittäisratkaisulla ”toiseen paikkaan” $C^n(I)$:ssä

Homogeeniyhtälön $L(y) = 0$ ratkaisuavaruuden *kannan* muodostavat n lineaarisesti riippumatonta ratkaisufunktiota $y_1, \ldots, y_n$ ja näiden *lineaarikombinaatioina* saadaan kaikki muut HY:n ratkaisut muodossa

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \quad (C_i \in \mathbb{R}\ \forall i), \tag{5.15}$$

vieläpä yksikäsitteisin kertoimin C_i.

Näin lineaarisen DY:n (5.13) ratkaisu voidaan toteuttaa kaksiosaisena, etsitään ensin HY:n $L(y) = 0$ yleinen ratkaisu ((5.15) yllä) *ratkaisujen perusjärjestelmän* $y_1, \ldots, y_n$ (n lineaarisesti riippumatonta ratkaisua, ts.

$$a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n \equiv 0 \ \Rightarrow \ a_i = 0\ \forall i)$$

avulla ja lisätään tähän jokin TY:n yksittäisratkaisu z ($L(z) = q$), jolloin saadaan TY:n yleinen ratkaisu

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n + z \quad (C_i \in \mathbb{R}\ \forall i), \tag{5.16}$$

Voidaan osoittaa, että tämä prosessi on teoriassa suoritettavissa (ei yleensä käytännössä) ja ratkaisufunktiot ovat määritellyt koko välillä I.

Ensimmäisen kertaluvun lineaariset differentiaaliyhtälöt

Kertaluvun 1 lineaarinen DY on muotoa

$$y' + p(x)y = q(x) \quad \big(p, q \in C^0(I)\big) \tag{5.17}$$

ja vastaavat AAT:t muotoa

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(x_0) = y_0 \ (x_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}) \tag{5.18}$$

AAT:llä on aina yksikäsitteinen ratkaisu $y : I \to \mathbb{R}$.

Kuten esimerkissä 5.9 (iii) todettiin, vastaava homogeeniyhtälö $y' + p(x)y = 0$ voidaan ratkaista separoituvana ja ratkaisuksi saadaan

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Tämän jälkeen täydelliselle yhtälölle (5.17) löytyy ratkaisu *vakion varioinnilla* eli tekemällä *yrite* $y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ (kokeillaan x:n funktiota C:n paikalle).

5.19 Esimerkki. Ratkaise DY $xy' - 2y = x^3 \cos x$ välillä $]0, \infty[$.

Ratkaisu. Välillä $]0, \infty[$ on $x > 0$ ja

$$xy' - 2y = x^3 \cos x \;\Leftrightarrow\; y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x,$$

joka on lineaarinen 1. kl:n DY. HY:n $y' - \dfrac{2}{x} y = 0$ ratkaisu on

$$y = Ce^{\int \frac{2}{x} dx} = Cx^2$$

Vakion variointi: Yrite TY:n ratkaisuksi

$$\begin{aligned}
&y = C(x)x^2 \;\Rightarrow\; y' = C'(x)x^2 + 2xC(x) \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; y' - \frac{2}{x} y = C'(x)x^2 + 2xC(x) - \frac{2}{x} C(x)x^2 = C'(x)x^2 = x^2 \cos x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \\
&\Leftrightarrow\; C'(x) = \cos x,
\end{aligned}$$

joten valinnalla $C(x) = \sin x$ saadaan TY:n yksittäisratkaisu $y = x^2 \sin x$. Siten TY:n yleinen ratkaisu on

$$\underline{\underline{y = Cx^2 + x^2 \sin x}} \quad \big(C \in \mathbb{R},\; x \in]0, \infty[\big).$$

Vakion variointimenetelmässä joudutaan viimeisessä vaiheessa laskemaan integraali ja tämä ei tietenkään aina onnistu suljetussa muodossa.

Toinen tapa ratkaista kertaluvun 1 lineaarinen DY on *integroivan tekijän* käyttö. Kerrotaan DY

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{5.17}$$

puolittain funktiolla $e^{F(x)}$, $F'(x) = p(x)$, $F(x) = \int p(x)dx$

$$y'e^{F(x)} + e^{F(x)}p(x)y = e^{F(x)}q(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(e^{F(x)}y\right) = e^{F(x)}q(x), \tag{5.20}$$

jolloin saadaan, että $e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}q(x)dx$ ja edelleen (5.17):n yleiseksi ratkaisuksi

$$y = e^{-F(x)} \int e^{F(x)}q(x)dx,$$

missä integroimisvakio C pitää muistaa ottaa mukaan integraalin tulokseen.

5.21 Esimerkki. Ratkaistaan esimerkin 5.19 DY

$$(*) \qquad y' + p(x)y = q(x), \quad p(x) = -\frac{2}{x}, \quad q(x) = x^2 \cos x$$

integroivan tekijän $e^{F(x)}$ avulla. Nyt

$$F(x) = \int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\ln|x| = -\ln(x^2)$$

ja $e^{F(x)} = e^{-\ln(x^2)} = -\dfrac{1}{x^2}$ ja saadaan

$$\begin{aligned}
&(*) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x^2}y' + \frac{1}{x^2}\left(-\frac{2}{x}\right)y = \frac{1}{x^2}\,x^2\cos x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = \cos x \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \cos x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x^2}y = \int \cos x\,dx \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x^2}y = \sin x + C \;\Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\; \underline{\underline{y = x^2\sin x + Cx^2}},
\end{aligned}$$

siis sama tulos.