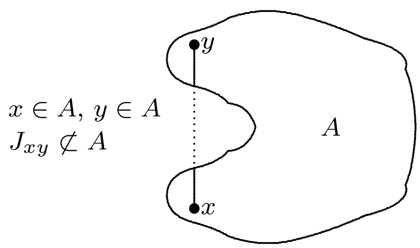
Palautan mieliin, että $\mathbb{R}$:n välillä $I$ derivoituvaa funktiota sanottiin konveksiksi (alaspäin kuperaksi), jos käyrä $y = f(x)$ on välillä $I$ jokaisen tangenttisuoransa yläpuolella. Tähän riitti, että $f''(x) \geq 0$ $I$:ssä. Yleistämme nyt tämän määritelmän useamman muuttujan funktioille ja myös tapaukseen, jossa $f$ ei välttämättä ole derivoituva. Näin määriteltävällä konveksisuudella on sovelluksia mm. ääriarvojen teoriassa eli optimoinnissa.

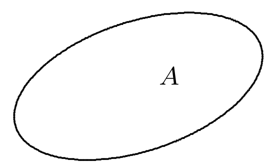
Jos $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$, niin *$x$:n ja $y$:n välinen jana* on

(4.1 ) $$J_{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid z = x + t(y - x) = (1-t)x + ty,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on *konveksi*, jos se aina sisältää kahta pistettään yhdistävät janat, ts. $\forall x, y \in A$ pätee $J_{xy} \subset A$. Erikoistapauksessa $x = y$ "jana" $J_{xy}$ on tässä pelkkä piste $\{x\}$.



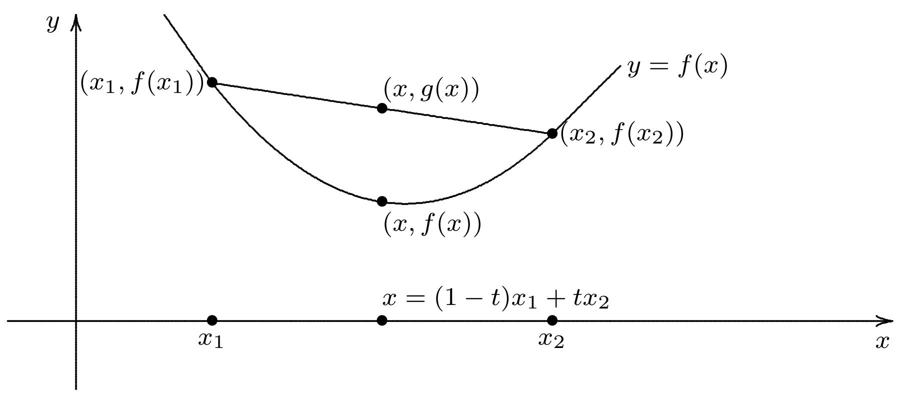

$A$ ei konveksi




$A$ konveksi

Konveksilla yhden muuttujan funktiolla $f : I \to \mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R}$ väli) havaitaan, että kuvaajan $y = f(x)$ pisteitä $(x_1, f(x_1))$ ja $(x_2, f(x_2))$ yhdistävän janan pisteet näyttävät alla olevan kuvan mukaisesti sijaitsevan käyrän $y = f(x)$ "yläpuolella".

(4.2)




Jos $x = (1-t)x_1 + tx_2$ ja $g(x) = (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$, saamme havaintomme algebralliseen asuun: $g(x) \geq f(x)$ $\forall x \in [x_1, x_2]$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in [0, 1]$ pätee ehto

(4.3) $$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Vaatimalla ehto (4.3) kaikilla $x_1, x_2 \in I$ ja kaikilla $t \in [0, 1]$ saadaan konveksisuudelle uusi määritelmä, joka ei vaadi $f$:n derivoituvuutta ja joka yleistyy välittömästi useamman muuttujan funktioille konvekseissa määrittelyjoukoissa. Koska (4.3) pätee päätepisteissä $x_1$ ja $x_2$ eli arvoilla $t = 0$ ja $t = 1$ yhtälönä, riittää vaatia (4.3) arvoilla $t \in ]0, 1[$.

**4.4 Määritelmä.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ konveksi joukko. Funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on (joukossa $A$) *konveksi*, jos $\forall x_1, x_2 \in A$ ja $\forall t \in \,]0,1[$ pätee ehto

$$\text{(i)} \qquad f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Jos epäyhtälö ehdossa (i) on aito ($<$) aina kun $x_1 \ne x_2$, $f$ on *vahvasti konveksi*. Funktio $f$ on (joukossa $A$) *konkaavi*, jos

$$\text{(ii)} \qquad f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \ge (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ \forall x_1, x_2 \in A, \ t \in \,]0,1[\,.$$

ja *vahvasti konkaavi*, jos epäyhtälö ehdossa (ii) on aito ($>$) aina kun $x_1 \ne x_2$.

**4.5 Huomautus.** (i)

$$\text{Konveksi} = \text{alaspäin kupera}$$
$$\text{konkaavi} = \text{ylöspäin kupera.}$$

(ii) Joukko $G = G(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A, \ y = f(x)\}$ (tässä siis $(x,y) = (x_1, \dots, x_n, y)$) on funktion $f : A \to \mathbb{R}$ *graafi* eli *kuvaaja* avaruudessa $\mathbb{R}^{n+1}$. Kuvan 4.2 mukaisesti konveksisuus tarkoittaa, että kuvaajapinnan pisteiden $\big(x_1, f(x_1)\big)$ ja $\big(x_2, f(x_2)\big)$ yhdysjanan pisteet ovat aina vastaavien kuvaajapinnan pisteiden "yläpuolella" koordinaatin $n+1$ suunnassa aina kun muodostetaan kuvan 4.2 kaltainen kaksiulotteinen tasoleikkaus, jossa $A \times \mathbb{R}$:ää leikataan tasolla, jonka toinen "virittäjävektori" osoittaa suuntaan $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$.

(iii) Määritelmässä 4.4 $A$:sta on oletettu vain, että se on $\mathbb{R}^n$:n konveksi osajoukko. Näin ollen $A$:n ei tarvitse olla $n$-ulotteinen, vaan se voi olla esim. piste (ei kiinnostava tapaus) tai jana tai tason kolmio, kun dimensio on $n \ge 2$. Yleisimmin $A$:lla kuitenkin on sisäpisteitä $\mathbb{R}^n$:ssä, jolloin se on $n$-ulotteinen. Vain tällöin voidaan puhua $f$:n ($n$-ulotteisesta) derivoituvuudesta. Muuten jouduttaisiin derivaatoista puhuttaessa tarkastelemaan derivaattakäsitteiden vastineita $A$:n "virittämässä" $p$-ulotteisessa $\mathbb{R}^n$:n affiinissa aliavaruudessa $\operatorname{aff}(A)$ (Jos esim. $A$ on jana, $p = 1$ ja $\operatorname{aff}(A)$ on suora; jos $A$ on kolmio (sisuksineen), $p = 2$ ja $\operatorname{aff}(A)$ on taso). Tällainen teoria on muodostettavissa, mutta emme etene tähän suuntaan.

(iv) Voidaan näyttää, että konveksit ja konkaavit funktiot $f : A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia joukon $A$ sisäpisteissä ($A \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi).

Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi avoin joukko, niin jatkuvasti derivoituvalle $f : A \to \mathbb{R}$ $f$:n konveksisuus voidaan karakterisoida kuvaajapinnan $y = f(x)$ pisteisiin $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ kuuluvien tangenttitasojen avulla kuten syksyn kurssissa yhden muuttujan funktioille:

Tätä varten tarkastellaan aluksi kuvaajapinnan $G = \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in A\}$ tagenttitasoa pisteessä $(x_0, y_0) \in G$. Kuvaajapinta on funktion

$$F : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x) \quad (x \in A),$$

tasa-arvopinta $F(x, x_{n+1}) = 0$, joten $\nabla F(x, x_{n+1}) = \big(-\nabla f(x), 1\big)$ on sen normaalivektori ja tangenttitason yhtälöksi saadaan tämän nojalla pisteessä $(x_0, y_0)$ $(y_0 = f(x_0))$ yhtälö

$$\text{(4.6)} \qquad \begin{cases} \big(-\nabla f(x_0), 1\big) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \\ \Leftrightarrow \; y - f(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \; (x \in \mathbb{R}^n, \; y \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Kyseessä on siis $\mathbb{R}^{n+1}$:n $n$-ulotteinen hypertaso, joka sivuaa pintaa $G$ pisteessä $(x_0, f(x_0))$.

**4.7 Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuvasti derivoituva ja $S \subset A$ konveksi. Tällöin $f$ on konveksi joukossa $S$, jos ja vain jos*

$$\text{(4.8)} \qquad f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in S$$

*[eli jos ja vain jos $f$:n kuvaajapinnan $G$ $S$:n yllä olevat pisteet ovat $S$:n pisteisiin kuuluvien $G$:n tangenttitasojen (4.6) ”yläpuolella” koordinaatin $x_{n+1}$ suunnassa].*

*Todistus.* Kts. Patovaaran kirja, sivuutetaan luennoilla.

**4.9 Seuraus.** *Lauseen 4.7 tilanteessa $f$ on konkaavi joukossa $S \subset A$, jos ja vain jos*

$$\text{(4.10)} \qquad f(x) \leq f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in S$$

*Todistus.* 4.7 sovellettuna $-f$:ään. □

**4.11 Huomautus.** (i) (4.8):ssa aito epäyhtälö aina kun $x \neq x_0 \;\Leftrightarrow\; f$ on vahvasti konveksi $S$:ssä.
(ii) (4.10):ssä aito epäyhtälö aina kun $x \neq x_0 \;\Leftrightarrow\; f$ on vahvasti konkaavi $S$:ssä.

Käytännöllinen ehto konveksisuuden tutkimisessa saadaan Hessen matriisin definiittisyyden avulla (merkinnät ehdossa ovat 3.56:n mukaiset):

**4.12 Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f \in C^2(A)$ ja $S \subset A$ konveksi. Olkoon*

$$H(x) = (D_{ij} f(x)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*$f$:n Hessen matriisi (ks. 3.33). Tällöin*
*(i) Jos $H(x) \geq 0 \; \forall x \in S$, $f$ on konveksi $S$:ssä.*
*(ii) Jos $H(x) > 0 \; \forall x \in S$, $f$ on vahvasti konveksi $S$:ssä.*
*(iii) Jos $H(x) \leq 0 \; \forall x \in S$, $f$ on konkaavi $S$:ssä.*
*(iv) Jos $H(x) < 0 \; \forall x \in S$, $f$ on vahvasti konkaavi $S$:ssä.*

*Todistus.* Lauseen todistus nojaa useamman muuttujan funktioiden Taylorin kehitelmään, jonka joudumme kurssilla sivuuttamaan. Yritän kuitenkin antaa kuvan todistuksen juonesta luennolla. □

**4.13 Lause.** *Neliömuoto* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) = X^T AX$, *on* $\mathbb{R}^n$*:ssä*
*(i) konveksi, jos* $A \geq 0$,
*(ii) vahvasti konveksi, jos* $A > 0$,
*(iii) konkaavi, jos* $A \leq 0$,
*(iv) vahvasti konkaavi, jos* $A < 0$.

*Todistus.* Koska $Q$:n Hessen matriisi on $2A$ (3.34(ii)), väite seuraa heti 4.12:sta. □

**4.14 Esimerkki.** (i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$ on vahvasti konveksi $\mathbb{R}^3$:ssa, sillä

$$f(x) = X^T AX, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ ja}$$

$$d_1 = 1 > 0,\ d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0,$$

$$d_3 = \det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 2 - 3 = 1 > 0,$$

joten $A > 0$ ja 4.13(ii) $\Rightarrow$ neliömuoto $f$ on vahvasti konveksi.

(ii) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 8x + 27y$. Tällöin

$$D_1 f = 4x^3 + 8, \quad D_2 f = 4y^3 + 27,$$
$$D_{11} f = 12x^2, \quad D_{22} f = 12y^2, \quad D_{12} f = D_{21} f = 0$$

ja $f$:n Hessen matriisi on

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nyt

$$12x^2 \geq 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{ja} \quad 12y^2 \geq 0,$$

joten 3.55(ii) $\Rightarrow$ $H(x,y) \geq 0\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja edelleen 4.12(i) $\Rightarrow$ $f$ on konveksi $\mathbb{R}^2$:ssa. Jos $S \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x = 0 \text{ tai } y = 0\}$, on $H(x,y) > 0\ \forall (x,y) \in S$. Jos $S$ on konveksi, 4.12(ii) $\Rightarrow$ $f$ on vahvasti konveksi $S$:ssä.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ on konveksi (harjoitustehtävä). Tähän ei voi soveltaa lauseen 4.12 kriteerejä origon sisältävällä välillä, sillä $f$ ei ole derivoituva origossa. On siis käytettävä suoraan määritelmää!

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ on konveksi (likimain sama todistus kuin äskeisessä esimerkissä, harjoitustehtävä).

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, on vahvasti konveksi. Nyt $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ ja $H(x) = [\,2\,] > 0$, joten 4.12(ii) $\Rightarrow$ $f$ on vahvasti konveksi $\mathbb{R}$:ssä. (Tietysti tämä saadaan myös syksyn kurssin teorialla.)

(vi) Neliömuoto $Q(x,y,z) = -(x+2y+3z)^2 = -x^2 - 4y^2 - 9z^2 - 4xy - 6xz - 12yz$ on negatiivisesti semidefiniittinä konkaavi (4.13 iii). Tarkistetaan tämä determinanttiehdolla 3.55(iv). Nyt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad -A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Osoitetaan $-A$ positiivisesti semidefiniitiksi ehtoa 3.55(iii) käyttäen laskemalla $\det B$ kaikilla $B$, jotka saadaan $A$:sta poistamalla $r$ riviä ja vastaavat $r$ saraketta ($r = 0, 1, 2$):
$-A$:n diagonaalialkiot ovat $> 0$ ($r = 2$),

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \geq 0, \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \geq 0, \ \ (r = 1).$$

ja $\det(-A) = 0 \geq 0$ ($r = 0$), joten aina $\det B \geq 0$ ja $-A$ on positiivisesti semidefiniitti ja $A$ siis negatiivisesti semidefiniitti. Koska $Q$:n Hessen matriisi $2A \leq 0$, on $Q$ siis konkaavi $\mathbb{R}^3$:ssa $\big($4.13(iii) tai 4.12(iii)$\big)$. $Q$ ei ole vahvasti konkaavi, koska $Q(x,y,z)$ häviää tasossa $T : x + 2y + 3z = 0$ ja saadaan, että

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1, z_1) \in T, \ (x_2, y_2, z_2) \in T, \ 0 < t < 1 \ \Rightarrow \\ &f\big((1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2)\big) = 0 = (1-t)f(x_1, y_1, z_1) + tf(x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

## Lokaalit ääriarvot

**4.15 Määritelmä.** Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ funktio. Funktiolla $f$ on *sisäpisteessä* $x_0 \in A$
(a) *lokaali minimikohta*, jos $\exists \delta > 0$ s.e. $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| < \delta\} \subset A$ ja

$$f(x_0) = \min f\big(U_\delta(x_0)\big) = \min\{f(x) \mid \|x - x_0\| < \delta\}.$$

Tällöin $f(x_0)$ on $f$:n *lokaali minimi(arvo)*.
(b) *lokaali maksimikohta*, jos $\exists \delta > 0$ s.e. $U_\delta(x_0) \subset A$ ja

$$f(x_0) = \max f\big(U_\delta(x_0)\big) = \max\{f(x) \mid \|x - x_0\| < \delta\}.$$

Tällöin $f(x_0)$ on $f$:n *lokaali maksimi*.
Jos $f(x_0)$ on $f$:n lokaali minimi tai lokaali maksimi, $x_0$ on $f$:n *(lokaali) ääriarvokohta* ja $f(x_0)$ on $f$:n *(lokaali) ääriarvo*. Jos ehdossa (a) pätee $f(x_0) < f(x)\ \forall x \in U'_\delta(x_0)$ (vastaavasti ehdossa (b) $f(x_0) > f(x)\ \forall x \in U'_\delta(x_0)$), niin lokaali minimi $f(x_0)$ on *aito* (*oleellinen*) (vastaavasti lokaali maksimi $f(x_0)$ on *aito* (*oleellinen*)).

Jos $\exists M = \max f(A)$, $M$ on $f$:n *globaali maksimi* ($A$:ssa). Vastaavasti $m = \min f(A)$ on olemassa ollessaan $f$:n *globaali minimi*.

**4.16 Huomautus.** (i) Tapauksessa $n = 1$, jolloin $A \subset \mathbb{R}$, saadaan vanhat tutut peruskurssin määritelmät yhden muuttujan funktioiden lokaaleille ääriarvoille.

(ii) Globaalin ääriarvon ei tarvitse olla lokaali ääriarvo, sillä globaali ääriarvo voi tulla $A$:n reunapisteessäkin ja tällainen piste ei yllä annetun määritelmän mielessä ole lokaali ääriarvokohta. Esim. funktiolla $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, on

$$M = \max f\big([0,1]\big) = f(1) = 1, \quad m = \min f\big([0,1]\big) = f(0) = 0,$$

mutta $f$:llä ei ole lokaaleja ääriarvoja, koska $f$ on aidosti kasvava $]0,1[$:ssä.

Derivoituvalla yhden muuttujan funktiolla $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ välttämätön ehto lokaalille ääriarvolle oli derivaatan $f'(x)$ häviäminen:

$$f(x_0) \text{ on lokaali ääriarvokohta } \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Tämä yleistyy heti $n$:n muuttujan funktioille:

**4.17 Lause.** *Jos $A$:n sisäpiste $x_0$ on $x_0$:ssa derivoituvan funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) lokaali ääriarvokohta, niin*

$$D_i f(x_0) = 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad (\text{ eli } \nabla f(x_0) = f'(x_0) = \overline{0}).$$

*Todistus.* Koska $D_i f(x_0)$ on yhden muuttujan funktion $f(x_0 + te_i) = g(t)$ ($e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i:\text{s}}{1}, 0, \ldots, 0)$) tavallinen derivaatta $g'(0)$, väite seuraa helposti yhden muuttujan teoriasta. (Täydennä todistus!). $\square$

**4.18 Esimerkki.** i) Funktion $f(x,y) = xy^2$ ääriarvot?

Nyt $A = \mathbb{R}^2$ ja jopa $f \in C^\infty(A)$. Välttämätön ehto ääriarvolle on gradientin häviäminen:

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 0 \\ D_2 f(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat siis $x$-akselin pisteet $(x_0, 0)$, joissa funktion arvo $f(x_0) = x_0 \cdot 0^2 = 0$. Edelleen $x_0 > 0 \Rightarrow \exists (x_0,0)$:n ympäristö $U_\delta\big((x_0,0)\big)$ s.e.

$$(x,y) \in U_\delta\big((x_0,0)\big) \Rightarrow f(x,y) = xy^2 \geq 0 = f(x_0,0)$$

(voi valita $\delta = x_0 > 0$, jolloin $(x,y) \in U_\delta\big((x_0,0)\big) \;\Rightarrow\; x_0 > 0$) ja jos $x_0 < 0$, valinnalla $\delta = -x_0 > 0$ pätee

$$(x,y) \in U_\delta\big((x_0,0)\big) \;\Rightarrow\; f(x,y) = xy^2 \le 0 = f(x_0,0).$$

Siis pisteet $(x_0,0)$ ovat lokaaleja ääriarvokohtia, jos $x_0 \neq 0$ ja vastaavat ääriarvot ovat

lokaalit maksimit $f(x_0,0) = 0$, kun $x_0 < 0$,

lokaalit minimit $f(x_0,0) = 0$, kun $x_0 > 0$.

Mikään näistä ääriarvoista ei ole oleellinen, sillä $x$-akselilla $f(x,y) = 0$ ja pisteiden $(x_0,0)$ ympäristössä on aina muitakin $x$-akselin pisteitä.

Origo ei ole $f$:n ääriarvokohta, sillä origon joka ympäristössä $f$ saa sekä arvoa $f(0,0) = 0$ suurempia arvoja ($xy^2 > 0$, kun $x > 0$ ja $y \neq 0$) että sitä pienempiä arvoja ($xy^2 < 0$, kun $x < 0$ ja $y \neq 0$).

Edelleen on selvää, että $f$:llä ei ole suurinta eikä pienintä arvoa $\mathbb{R}^2$:ssa, sillä lauseke $f(x,y) = xy^2$ saa mielivaltaisen suuria ja pieniä arvoja. Perusteluksi kelpaa vaikkapa havainto, että $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,1) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot 1 = \pm\infty$.

ii) Haetaan neliömuodon $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + yz$ ääriarvot.

Nyt $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, joten ääriarvokohdassa $\nabla f$:n on oltava $\overline{0}$:

$$\left.\begin{aligned} D_1 f &= 2x = 0 \\ D_2 f &= 2y + z = 0 \\ D_3 f &= 4z + y = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \\ z &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ainoa mahdollinen ääriarvokohta on siis origo. Koska

$$Q(x,y,z) = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{7}{4}z^2 > 0$$

origon ulkopuolella, origo on aito lokaali ääriarvokohta ja arvo $Q(0,0,0) = 0$ on $Q$:n lokaali ja globaali minimi $\mathbb{R}^3$:ssa.

$Q(0,0,0) = 0$ havaittaisiin globaaliksi minimiksi myös osoittamalla $Q$ positiivisesti definiitiksi $Q$:hun liittyvän symmetrisen matriisin $A$ determinantteja tutkimalla.

(iii) $f(x,y) = \sin(x+y)$ $(f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$.

$$\left.\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= \cos(x+y) = 0 \\ D_2 f(x,y) &= \cos(x+y) = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow\; x + y = \frac{\pi}{2} + n\pi \;\; (n \in \mathbb{Z})$$

Ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat siis suorien $x + y = \frac{\pi}{2} + n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ kaikki pisteet. Koska $-1 \le f(x,y) \le 1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja koska

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = -1 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

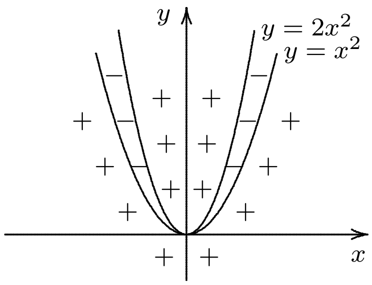
suorien $x+y=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ pisteet ovat lokaaleja (jopa globaaleja) maksimikohtia ja suorien $x+y=\frac{\pi}{2}+(2n+1)n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ pisteet minimikohtia.

(iv) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=(2x^2-y)(x^2-y)=2x^4-3x^2y+y^2$.

$$\left.\begin{aligned} D_1f&=8x^3-6xy=0\\ D_2f&=-3x^2+2y=0\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(8x^2-3y)=0\\ -3x^2+2y=0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases} \text{ tai } \begin{cases} y=\frac{8}{3}x^2\\ y=\frac{3}{2}x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}$$

Ainoa mahdollinen ääriarvokohta on siis origo. Nyt $f(0,0)=0$ ei ole ääriarvo seuraavan merkkikaavion nojalla:




Tulon $f(x,y)=(2x^2-y)(x^2-y)$ merkki on paraabelien välissä $-$, ja muualla $+$

Koska konveksin jatkuvasti derivoituvan funktion kuvaajapinta sijaitsee tangenttitasojensa yläpuolella, gradientin häviäminen takaa tällaisella funktiolla jopa globaalin minimin.

**4.19 Lause.** *Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ avoin, $f\in C^1(A)$ ja $S\subset A$ konveksi. Tällöin*
*(a) Jos $f$ on konveksi $S$:ssä, $x_0\in S$ ja $\nabla f(x_0)=\overline{0}$, niin $f(x_0)=\min f(S)$.*
*(b) Jos $f$ on konkaavi $S$:ssä, $x_0\in S$ ja $\nabla f(x_0)=\overline{0}$, niin $f(x_0)=\max f(S)$.*
*Erityisesti, jos $S=A$ on konveksi ja $x_0\in S$, niin konvekseille ja konkaaveille $f:A\to\mathbb{R}$ pätee.*

$$(4.20)\quad f(x_0) \text{ on lokaali ääriarvo } \Leftrightarrow f(x_0) \text{ on globaali ääriarvo } \Leftrightarrow \nabla f(x_0)=\overline{0}.$$

*Todistus.* (a) Kaavan (4.8) nojalla oletustilanteessa pätee arvio

$$f(x)\geq f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+\overline{0}\cdot(x-x_0)=f(x_0)\quad \forall x\in S,$$

joten $f(x_0)=\min f(S)$.
(b) Kaavan (4.10) nojalla oletustilanteessa pätee arvio

$$f(x)\leq f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)=f(x_0)+\overline{0}\cdot(x-x_0)=f(x_0)\quad \forall x\in S,$$

joten $f(x_0)=\max f(S)$.

Jos $S=A$ on konveksi avoin joukko $\mathbb{R}^n$:ssä, ehtojen (a) ja (b) globaalit ääriarvot ovat myös lokaaleja ja lauseesta 4.17 seuraa, että niiden olemassa ollessa täytyy olla $\nabla f(x_0)=\overline{0}$. □

**4.21 Esimerkki.** i) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 7x - 2y$. Nyt

$$\left.\begin{aligned} D_1 f &= -2x + y + 7 = 0 \\ D_2 f &= -2y + x - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ joten } \nabla f\text{:n ainoa } \overline{0}\text{-kohta on } (4,1).$$

Edelleen

$$D_{11} f = -2, \quad D_{22} f = -2, \quad D_{12} f = D_{21} f = 1 \;\Rightarrow\; H(x,y) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

ja tämä $H$ on negatiivisesti definiitti (totea!) ja $f$ siis konkaavi ja 4.19 (b):stä seuraa, että $f(4,1) = -16 - 1 + 4 + 28 - 2 = 13$ on $f$:n suurin arvo $\mathbb{R}^2$:ssa eli $\max f(\mathbb{R}^2) = 13$. Piste $(4,1)$ on nyt ainoa $f$:n lokaali (jopa globaali) ääriarvokohta. Sitä ei ole helppo löytää neliöksi täydentelyllä (kokeile!).

ii) $f(x,y) = x^4 + y^4 + 8x + 27y$. Nyt

$$\left.\begin{aligned} D_1 f &= 4x^3 + 8 = 0 \\ D_2 f &= 4y^3 + 27 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt[3]{2} = x_0 \\ y = -\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}} = y_0, \end{cases}$$

joten nyt $\nabla f$:n ainoa $\overline{0}$-kohta on $(x_0, y_0)$. Koska $f$ on konveksi $\mathbb{R}^2$:ssa (esim. 4.14 (ii)), $f\left(-\sqrt[3]{2}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right) = \min f(\mathbb{R}^2)$ lauseen 4.19 (a) nojalla.

Jos $f$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva ja jos $f$:n Hessen matriisi $H(x_0) > 0$ (tai $H(x_0) < 0$) on positiivisesti (tai negatiivisesti) definiitti pisteessä $x_0$, sama pätee pienessä $x_0$:n ympäristössä $U_\delta(x_0)$. Syy: vasemman yläkulman determinantit $d_i$ ($i = 1, \ldots, n$; ks. 3.55 (i) ja (ii)) ovat jatkuvia, joten niiden positiivisuus (tai negatiivisuus) säilyy pienessä $x_0$:n ympäristössä. Tällöin lause 4.19 johtaa heti seuraavaan tärkeään tulokseen, joka antaa riittävän ehdon lokaalille ääriarvolle.

**4.22 Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $x_0 \in A$ ja $f : A \to \mathbb{R}$ kahdesti jatkuvasti derivoituva funktio ($f \in C^2(A)$). Jos $f$:n gradientti häviää $x_0$:ssa, $\nabla f(x_0) = \overline{0}$, ja jos $f$:n Hessen matriisi*

$$H(x_0) = \big(D_{ij} f(x_0)\big) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

*on positiivisesti (tai negatiivisesti) definiitti, niin $f(x_0)$ on oleellinen lokaali minimi (tai maksimi).* $\square$

Kääntäen voidaan osoittaa (ks. Patovaara, lause 2.13), että lauseen 4.22 tilanteessa pätee

$$\text{(4.23)} \qquad \begin{aligned} f(x_0) \text{ lokaali minimi } &\Rightarrow H(x_0) \geq 0 \\ f(x_0) \text{ lokaali maksimi } &\Rightarrow H(x_0) \leq 0. \end{aligned}$$

Näin ollen $f(x_0)$ ei voi olla ääriarvo, jos $H(x_0)$ on indefiniitti ja on ääriarvo, jos $\nabla f(x_0) = \overline{0}$ ja $H(x_0)$ on definiitti. Sen sijaan tapauksessa, jossa $H(x_0)$ on semidefiniitti ja $\nabla f(x_0) = \overline{0}$, $f(x_0)$ voi olla tai olla olematta ääriarvo, kuten myöhemmät esimerkit osoittavat. Asia täytyy tällöin ratkaista esim. suoraan määritelmää käyttäen.

Kahden muuttujan funktioilla yllä esitetty saa erityisen yksinkertaisen muodon.

**4.24 Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin, $f \in C^2(A)$, $(x_0, y_0) \in A$ ja $\nabla f(x_0, y_0) = \overline{0}$. Jos luku*

$$D_f = D_f(x_0, y_0) = D_{11}f(x_0, y_0)D_{22}f(x_0, y_0) - \big(D_{12}f(x_0, y_0)\big)^2$$

*on positiivinen, $(x_0, y_0)$ on $f$:n ääriarvokohta. Se on minimikohta, jos $D_f > 0$ ja $D_{11}f(x_0, y_0) > 0$ ja maksimikohta, jos $D_f > 0$ ja $D_{11}f(x_0, y_0) < 0$. Jos $D_f < 0$, $(x_0, y_0)$ ei ole ääriarvokohta.*

*Todistus.* $D_f$ on Hessen matriisin

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x_0, y_0) & D_{12}f(x_0, y_0) \\ D_{21}f(x_0, y_0) & D_{22}f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

determinantti ja väite seuraa helposti (4.23):n jälkeen todetusta ja lauseesta 3.55. Tapauksessa $D_f > 0$, $H(x_0, y_0)$ on näet 3.55:n nojalla definiitti ja tapauksessa $D_f < 0$ indefiniitti (harjoitustehtävä). $\square$

**4.25 Huomautus.** Tapauksessa $D_f = 0$, $H(x_0, y_0)$ on semidefiniitti (tarkista!) ja $f(x_0, y_0)$ voi olla tai olla olematta ääriarvo. Asia on tutkittava esim. määritelmää käyttäen. Tämä voi olla vaikeaa kuten esimerkin 4.18(iv) funktiolle $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$, jolle $\nabla f(0, 0) = \overline{0}$ ja $D_f(0, 0) = 0$ (laske!). Jos tekijöihin jakoa $f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$ ei keksi, voi olla vaikeaa löytää origon joka ympäristöstä pisteitä, joissa $f(x, y) < f(0, 0) = 0$. "Valtaosassa" pisteitä on näet $f(x, y) > 0$, ks. 4.18 (iv):n kuvaa.

**4.26 Esimerkki.** (i) $f(x, y) = x^2 + y^3 + y^4$. Tällöin $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ja

$$\left.\begin{aligned} D_1 f &= 2x = 0 \\ D_2 f &= 3y^2 + 4y^3 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{tai} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Siis ainoat mahdolliset ääriarvokohdat ovat origo ja $(0, -\frac{3}{4})$. Nyt

$$D_{11}f = 2, \quad D_{22}f = 6y + 12y^2 \quad \text{ja} \quad D_{12}f = 0 \ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} D_f(0, -\frac{3}{4}) = 2 \cdot \left(6\left(-\frac{3}{4}\right) + 12\left(-\frac{3}{4}\right)^2\right) - 0^2 > 0, \\ D_f(0, 0) = 2 \cdot 0 - 0^2 = 0. \end{cases}$$

Näin ollen piste $(0, -\frac{3}{4})$ on ääriarvokohta ja koska $D_{11}f(0, -\frac{3}{4}) = 2 > 0$, se on minimikohta. Vastaava *lokaali minimi* on

$$\underline{\underline{f(0, -\tfrac{3}{4})}} = 0 - \tfrac{27}{64} + \tfrac{81}{256} = \underline{\underline{-\tfrac{27}{256}}}.$$

Origon joka ympäristössä $f$ saa jo $y$-akselilla sekä arvoa $f(0,0)=0$ suurempia että sitä pienempiä arvoja, sillä

$$f(0,y)=y^3+y^4=y^3(1+y) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(0,y)>0, & \text{kun } y>0 \\ f(0,y)<0, & \text{kun } -1<y<0. \end{cases}$$

Näin ollen origo ei ole $f$:n ääriarvokohta.

Funktiolla $f$ on siis vain yksi lokaali ääriarvo, minimi $f(0,-\frac{3}{4})=-\frac{27}{256}$. Tällä kertaa (mutta ei yleisesti vastaavassa tilanteessa) tämä on samalla $f$:n pienin arvo $\mathbb{R}^2$:ssa, kuten yhden muuttujan funktioita $x\mapsto x^2$ ja $y\mapsto y^3+y^4$ tutkimalla helposti nähdään.

(ii) $f(x,y,z)=x^3-x^2y+yz+z$. Nyt $f\in C^2(\mathbb{R}^3)$ ja

$$\left.\begin{aligned} D_1f &= 3x^2-2xy=0 \\ D_2f &= -x^2+z=0 \\ D_3f &= y+1=0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \text{tai} \quad \begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-1 \\ z=\frac{4}{9} \end{cases}$$

Pisteet $(0,-1,0)$ ja $(-\frac{2}{3},-1,\frac{4}{9})$ ovat siis ainoat mahdolliset lokaalit ääriarvokohdat.

$$D_{11}f=6x-2y,\quad D_{22}f=0=D_{33}f,\quad D_{12}f=-2x,\quad D_{13}f=0,\quad D_{23}f=1$$

ja $f$:n Hessen matriisi

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 6x-2y & -2x & 0 \\ -2x & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$H(0,-1,0)$ ja $H(-\frac{2}{3},-1,\frac{4}{9})$ ovat indefiniittejä. Siten kumpikaan kyseeseen tulevista pisteistä ei ole ääriarvokohta ja *$f$:llä ei ole ääriarvoja.*

### Funktion suurimman ja pienimmän arvon etsiminen annetussa joukossa

Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ joukko ja $f:A\to\mathbb{R}$ funktio. Asetetaan tehtäväksi optimointiprobleema määrittää luvut

$$M=\max f(A) \qquad \text{ja} \qquad m=\min f(A)$$

jos ne ovat olemassa. Jos $A$ on suljettu (ts. $\mathbb{R}^n\setminus A$ avoin) ja *rajoitettu* (ts. $\exists\, R>0$ s.e. $A\subset[-R,R]^n$), niin $A$ on *kompakti*. Kompaktissa joukossa $A$ jatkuvalla funktiolla $f:A\to\mathbb{R}$ olemassaolokysymys on edeltä selvä.

**4.27 Lause.** *Olkoon $A\subset\mathbb{R}^n$ kompakti joukko ja $f:A\to\mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin $f$ saa $A$:ssa suurimman ja pienimmän arvon, ts.*

$$\exists\, M=\max f(A) \qquad \textit{ja} \qquad \exists\, m=\min f(A).$$

*Todistus.* Sivuutetaan. $\square$

**4.28 Esimerkki.** (i) $A = [-1, 1] \times [7, 9] \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti, joten jokaisella jatkuvalla $f : A \to \mathbb{R}$ on suurin ja pienin arvo.

(ii) $\mathbb{R}^2$ ei ole kompakti ($\mathbb{R}^2$ ei ole rajoitettu).

(iii) $B_1(\overline{0}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ ei ole kompakti ($B_1(\overline{0})$ ei ole suljettu).

(iv) $\overline{B_1}(\overline{0}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ on kompakti.

(v) $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ on kompakti

Perustelu: Selvästi $S^{n-1}$ on rajoitettu. Suljetuksi $S^{n-1}$:n voi näyttää osoittamalla kolmioepäyhtälön avulla sen komplementti $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \neq 1\}$ avoimeksi tai helpommin seuraavalla periaatteella. Koko $\mathbb{R}^n$:ssä jatkuvan reaalifunktion $f$ tasa-arvojoukot $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = C\}$ ($C \in \mathbb{R}$) ovat aina suljettuja. Valinta $f(x) = \|x\|$ antaa tällöin heti, että $S^{n-1}$ on suljettu.

(vi) Jos neliömuoto $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on positiivisesti definiitti, niin $0 = Q(\overline{0}) = \min Q(\mathbb{R}^n)$. Jos $Q$ on negatiivisesti definiitti, niin $0 = Q(\overline{0}) = \max Q(\mathbb{R}^n)$.

(vii) Jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on konveksi avoin joukko, $f \in C^2(A)$ on konveksi ja $\nabla f(x_0) = \overline{0}$, niin $f(x_0) = \min f(A)$ lauseen 4.19 (a) nojalla. Jos $Q$ lisäksi eroaa vakiofunktiosta 0 (jota ei välttämättä neliömuodoksi ehkä olisi kannattanut salliakaan), niin $\nexists \max f(A)$.

Jos $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $A \subset \mathbb{R}^n$ on kompakti, suurin ja pienin arvo ovat siis olemassa. Jos $f$ on derivoituva $A$:n sisäpisteissä, niin ne löytyvät seuraavilla askeleilla 1–3:

1) Haetaan ne $A$:n (sisä)pisteet $x$, joissa $f$:n gradientti $\nabla f(x) = \overline{0}$ ja lasketaan vastaavat arvot $f(x)$.

2) Määritetään $f$:n suurin ja pienin arvo reunalla $\partial A$, ts. etsitään luvut $\max f(\partial A)$ ja $\min f(\partial A)$. (Ne ovat olemassa, sillä myös $\partial A$ on kompakti.)

3) Valitaan saaduista $f$:n arvoista suurin $M$ ja pienin $m$, jolloin $M = \max f(A)$ ja $m = \min f(A)$.

**4.29 Esimerkki.** i) Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 2y$ suurin ja pienin arvo joukoisssa $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ ja $B = [-2, 2] \times [0, 2]$.

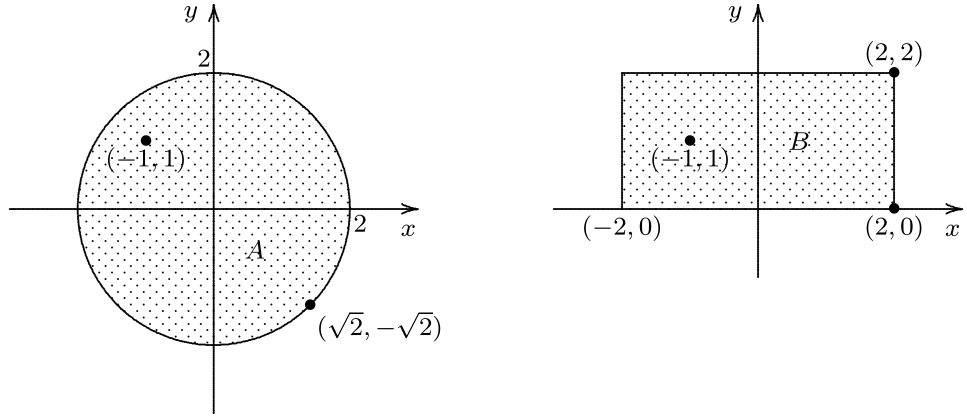
*Ratkaisu.* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ja $A$ ja $B$ ovat kompakteja, joten on olemassa $M = \max f(A)$, $m = \min f(A)$, $N = \max f(B)$ ja $n = \min f(B)$. Edelleen

$$\left.\begin{aligned} D_1 f &= 2x + 2 = 0 \\ D_2 f &= 2y - 2 = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right.$$

ja piste $(-1, 1)$ on sekä $A$:n että $B$:n (sisä)piste. Vastaava arvo $f(-1, 1) = 1 + 1 - 2 - 2 = -2$

*Kuvat*

(4.30)




Reunat: $\partial A = \{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$ on origokeskinen 2-säteinen ympyräviiva. Käytetään $\partial A$:n pisteille parametriesitystä

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

jolloin

$f(x,y) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4\cos t - 4\sin t = 4(1+\cos t - \sin t) = 4g(t), \quad 0 \le t \le 2\pi.$

Siten $\max f(\partial A)$ ja $\min f(\partial A)$ löytyvät tutkimalla yhden muuttujan funktiota $g(t) = 1+\cos t - \sin t$ välillä $[0, 2\pi]$. Nyt

$$g'(t) = -\sin t - \cos t = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin t = -\cos t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{3\pi}{4} \quad \text{tai} \quad t = \frac{7\pi}{4},$$

sillä $0 \le t \le 2\pi$. Koska

$$\begin{aligned} &g(0) = 1 = g(2\pi) \text{ ja} \\ &g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} < 1 \text{ ja} \\ &g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} > 1, \end{aligned}$$

on

$$\max f(\partial A) = 4(1+\sqrt{2}) = \underline{\underline{4+4\sqrt{2}}} \quad \text{ja} \quad \min f(\partial A) = 4(1-\sqrt{2}) = \underline{\underline{4-4\sqrt{2}}}$$

Joukossa $B$ reunan $\partial B$ muodostaa neljä janaa, joilla $f$:n arvot saadaan tutkimalla seuraavia yhden muuttujan funktioita:

I) $g_1(t) = f(-2,t) = 4 + t^2 - 4 - 2t, \quad 0 \le t \le 2.$

II) $g_2(t) = f(t,2) = t^2 + 4 + 2t - 4, \quad -2 \le t \le 2.$

III) $g_3(t) = f(2,t) = 4 + t^2 + 4 - 2t, \quad 0 \le t \le 2.$

IV) $g_4(t) = f(t,0) = t^2 + 0 + 2t - 0, \quad -2 \le t \le 2.$

Yllä olevista seuraa

I) $g_1(t) = t^2 - 2t,\ g_1'(t) = 2t - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 1,\ g_1(0) = g_1(2) = 0,\ g_1(1) = -1.$

II) $g_2(t) = t^2 + 2t,\ g_2'(t) = 2t + 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = -1,\ g_2(-2) = 0,\ g_2(2) = 8,\ g_2(-1) = -1.$

III) $g_3(t) = 8 + t^2 - 2t,\ g_3'(t) = 2t - 2 = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 1,\ g_3(0) = 8,\ g_3(2) = 8,\ g_3(1) = 7.$

IV) $g_4(t) = t^2 + 2t = g_2(t)$ (ja sama väli $[-2, 2]$).

Kohtien I–IV nojalla

$$\max f(\partial B) = \max\{0, -1, 8, 7\} = 8 \quad \text{ja} \quad \min f(\partial B) = \min\{0, -1, 8, 7\} = -1$$

Näin ollen saamme vaiheessa 3) vastauksen

$$\begin{aligned}
&\underline{\underline{M}} = \max f(A) = \max\{-2, 4 + 4\sqrt{2}\} = \underline{\underline{4 + 4\sqrt{2}}} \ \text{ ja} \\
&\underline{\underline{m}} = \min f(A) = \min\{-2, 4 - 4\sqrt{2}\} = \underline{\underline{-2}} \ \text{ ja} \\
&\underline{\underline{N}} = \max f(B) = \max\{-2, 8\} = \underline{\underline{8}} \ \text{ ja} \\
&\underline{\underline{n}} = \min f(B) = \min\{-2, -1\} = \underline{\underline{-2}}.
\end{aligned}$$

Ratkaistaan tehtävä suoremmalla tavalla käyttäen hyväksi etäisyystulkintaa. Havaitsemme, että

$$f(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 2 = (x-(-1))^2 + (y-1)^2 - 2 = \|(x, y) - (-1, 1))\|^2 - 2,$$

missä $\|(x, y) - (-1, 1))\|^2$ on pisteen $(x, y)$ pisteestä $(-1, 1)$ mitatun etäisyyden neliö. Kuvien (4.30) nojalla on nyt geometrisesti ilmeistä, että

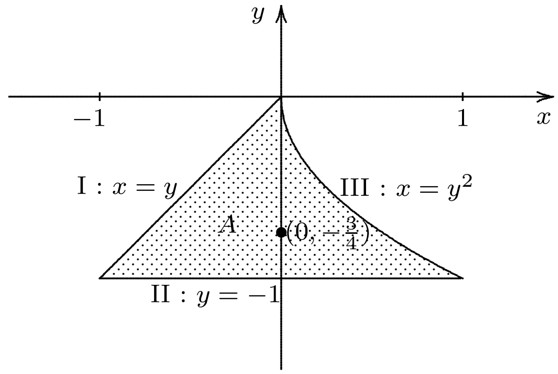
$$\begin{aligned}
m &= -2 = n \ \text{ ja} \\
M &= \|(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - (-1, 1)\|^2 - 2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (-\sqrt{2} - 1)^2 - 2 = \\
&= 3 + 2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2} - 2 = 4 + 4\sqrt{2} \ \text{ ja} \\
N &= \|(2, 2) - (-1, 1)\|^2 - 2 = \|(2, 0) - (-1, 1)\|^2 - 2 = \\
&= \|(3, \pm 1)\|^2 - 2 = 9 + 1 - 2 = 8.
\end{aligned}$$

[Itse asiassa näin saadaan, että $-2 = \min f(\mathbb{R}^2)$.]

ii) Haetaan jatkuvan funktion $f(x, y) = x^2 + y^3 + y^4$ suurin ja pienin arvo kompaktissa joukossa

$$A = \{(x, y) \mid y \leq x \leq y^2,\ -1 \leq y \leq 0\}.$$

*Kuva*:




Esimerkissä 4.26 (i) löydettiin jo $f$:n gradientin nollakohdat $(0,0) \in A$ ja $(0, -\frac{3}{4}) \in A$ ja arvot $f(0,0) = 0$, $f(0, -\frac{3}{4}) = -\frac{27}{256}$. (Tässä $(0, -\frac{3}{4})$ on $A$:n sisäpiste ja $(0,0) \in \partial A$.) Nyt $A$:n reuna $\partial A$ koostuu kolmesta käyrästä, joilla $f$:n optimointi voidaan palauttaa yhden muuttujan funktioiden teoriaan funktioiden $g_1$, $g_2$ ja $g_3$ avulla seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&\text{I)} && g_1(t) = f(t,t) = t^2 + t^3 + t^4, \quad -1 \le t \le 0. \\
&\text{II)} && g_2(t) = f(t,-1) = t^2 - (-1)^3 + (-1)^4 = t^2, \quad -1 \le t \le 1. \\
&\text{III)} && g_3(t) = f(t^2, t) = t^4 + t^3 + t^4 = 2t^4 + t^3, \quad -1 \le t \le 0
\end{aligned}$$

Laskut reunalla $\partial A$:

I) $g_1'(t) = 2t + 3t^2 + 4t^3 = t(2 + 3t + 4t^2) = 0 \iff t = 0$ (sillä $3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 < 0$); $g_1(0) = \underline{\underline{0}}$, $g_1(-1) = \underline{\underline{1}}$.

II) $g_2$:n minimi on $g_2(0) = \underline{\underline{0}}$ ja maksimi $g_2(1) = g_2(-1) = \underline{\underline{1}}$.

III) $g_3'(t) = 8t^3 + 3t^2 = t^2(8t + 3) = 0 \iff t = 0$ tai $t = -\frac{3}{8}$; $g_3(-1) = \underline{\underline{1}}$, $g_3(0) = \underline{\underline{0}}$, $g_3(-\frac{3}{8}) = 2 \cdot \frac{81}{4096} - \frac{27}{512} = \frac{81-108}{2048} = \underline{\underline{-\frac{27}{2048}}}$.

Saamme siis tulokseksi, että

$$\underline{\underline{M}} = \max f(A) = \max \left\{ -\frac{27}{256}, 0, 1, -\frac{27}{2048} \right\} = \underline{\underline{1 = f(1,-1) = f(-1,-1)}}$$

$$\underline{\underline{m}} = \min f(A) = \min \left\{ -\frac{27}{256}, 0, 1, -\frac{27}{2048} \right\} = \underline{\underline{-\frac{27}{256} = f(0, -\frac{3}{4})}}.$$

Joskus reunan $\partial A$ tutkimisessa voi olla edullista käyttää *sidottujen ääriarvojen* teoriaa ja siihen liittyvää Lagrangen menetelmää. Esimerkin 4.29 tapauksessa reuna

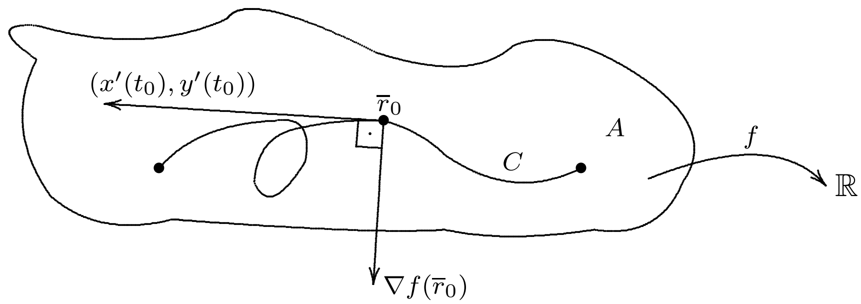
$$\partial A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\} = g^{-1}(0)$$

on funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, nollajoukko. Etsittäessä $f$:n suurinta ja pienintä arvoa $\partial A$:ssa etsitään siis $f$:n suurinta ja pienintä arvoa *sidosehdolla* $g(x,y) = 0$.

**Sidotut ääriarvot, Lagrangen menetelmä.**

Esittelen sidottujen ääriarvojen teoriaa aluksi $\mathbb{R}^2$:ssa ja $\mathbb{R}^3$:ssa, jolloin voin merkitä $\overline{r} = (x, y) = x\overline{i} + y\overline{j}$ tai $\overline{r} = (x, y, z) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. On selvää, että teoria yleistyy $\mathbb{R}^n$:ään.

**4.31 Kohtisuoran gradientin lause.** *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}^2$ *avoin,* $f : A \to \mathbb{R}$ *differentioituva,* $\overline{r} : I = [0, 1] \to A$ *derivoituva,* $\overline{r}(I) = C$ *välin* $I$ *kuvakäyrä,* $\overline{r}(t) = (x(t), y(t))\ \forall t \in I$, $0 < t_0 < 1$, $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0) \in C$.
*Kuva*




*Jos* $f(\overline{r_0})$ *on rajoittuman* $f|C : C \to \mathbb{R}$ *lokaali ääriarvo, ts. jos* $f(\overline{r}_0)$ *on suurin tai pienin luku joukossa* $f(C \cap U_\delta(\overline{r}_0)) \subset \mathbb{R}$ *jollain* $\delta > 0$*, niin* $\nabla f(\overline{r}_0)$ *on kohtisuorassa käyrän* $C$ *tangenttivektoria* $(x'(t_0), y'(t_0))$ *vastaan:*

$$\nabla f(\overline{r}_0) \cdot (x'(t_0), y'(t_0)) = D_1 f(\overline{r}_0) x'(t_0) + D_2 f(\overline{r}_0) y'(t_0) = 0 \tag{4.32}$$

*Todistus.* Merkitään $h = f \circ \overline{r}_0 : I \to \mathbb{R}$, jolloin $h(t_0) = f(\overline{r}_0)$ on yhden muuttujan funktion $h$ lokaali ääriarvo, kun $f(\overline{r}_0)$ on $f|C$:n lokaali ääriarvo. Koska $h$ on derivoituva (3.46), on oltava $h'(t_0) = 0$. Toisaalta ketjusäännön 3.46 mukaan on

$$h'(t_0) = D_1 f(\overline{r}_0) x'(t_0) + D_2 f(\overline{r}_0) y'(t_0),$$

joten $\nabla f(\overline{r}_0) \cdot \overline{r}'(t_0) = 0$. $\square$

**4.33 Huomautus.** Kohtisuoran gradientin lause lausuu, että mahdollisissa rajoittuman $f|C : C \to \mathbb{R}$ lokaaleissa ääriarvokohdissa $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0) \in C$ gradientin $\nabla f(\overline{r_0})$ on oltava kohtisuorassa käyrän $C = \overline{r}(I)$ tangenttisuoraa vastaan ( $(x'(t_0), y'(t_0))$ on tangenttisuoran suuntavektori). Vastaava lause tapauksessa $\overline{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $A \subset \mathbb{R}^3$ avoin, $f : A \to \mathbb{R}$ differentioituva, antaa kaavalle (4.32) muodon

$$\nabla f(\overline{r}_0) \cdot (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) = 0 \tag{4.34}$$

ja sen todistus ja tulkinta ovat (lähes) samat.

Tarkastellaan *sidottua ääriarvotehtävää:*

Minimoi tai maksimoi $f(x,y,z)$ joukossa $\{(x,y,z) \mid g(x,y,z)=0\} = g^{-1}(0) = B$, kun $B \subset A \subset \mathbb{R}^3$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ differentioituvia ja $\nabla g(\overline{r}) \neq \overline{0}\ \forall \overline{r} \in A$ (jolloin pinnalla $B$ on tangenttitaso joka pisteessään). On siis etsittävä *$f$:n ääriarvot sidosehdolla* $g(x,y,z) = 0$. Kohtisuoran gradientin lauseen nojalla mahdollisessa rajoittuman $f|B : B \to \mathbb{R}$ ääriarvopisteessä $\overline{r}_0 = \overline{r}(t_0)$ on oltava $\nabla f(\overline{r}_0) \cdot \overline{r}'(t_0) = 0$ kaikilla $\overline{r}_0$:n kautta kulkevilla $B$:n derivoituvilla käyrillä $\overline{r} : I \to C = \overline{r}(I)$, ts. $\nabla f(\overline{r}_0)$:n on oltava $B$:n $\overline{r}_0$:aan asetetun tangenttitason $\nabla g(\overline{r}_0) \cdot (\overline{r} - \overline{r}_0) = 0$ normaalivektori eli yhdensuuntainen $\nabla g(\overline{r}_0)$:n kanssa. Saadaan Lagrangen ehto

$$\nabla f(\overline{r}_0) = \lambda \nabla g(\overline{r}_0) \quad \text{jollain } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.35}$$

jossa esiintyvää reaalista apumuuttujaa $\lambda$ sanotaan Lagrangen kertojaksi. Tulos yleistyy välittömästi $n$:n muuttujan tilanteeseen ($n \geq 2$):

**4.36 Lause** *(Lagrangen menetelmä yhdellä sidosehdolla)***.**
*Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin joukko sekä $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g : A \to \mathbb{R}$ differentioituvia funktioita. Olkoon $B = g^{-1}(0) = \{x \in A \mid g(x) = 0\}$, $x_0 \in B$, ja $f_B = f|B : B \to \mathbb{R}$ $f$:n rajoittuma $g$:n nollajoukkoon $B$. Jos $x_0$ on $f_B$:n lokaali ääriarvokohta (eli jos $f(x_0)$ on $f$:n suurin tai pienin arvo joukossa $U_\delta(x_0) \cap B$ jollain $\delta > 0$), niin $\nabla f(x_0)$ ja $\nabla g(x_0)$ ovat lineaarisesti riippuvat (yhdensuuntaiset); siis $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ s.e. $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ tai $\nabla g(x_0) = \overline{0}$. Mahdolliset $f_B$:n lokaalit ääriarvokohdat $x \in B$ löytyvät ratkaisemalla yhtälöryhmät*

$$(1) \quad \begin{cases} \nabla g(x) = \overline{0} \\ g(x) = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{L}) \quad \begin{cases} \nabla (f - \lambda g)(x) = \overline{0} \\ g(x) = 0, \end{cases}$$

*joista jälkimmäinen on ns. Lagrangen yhtälöryhmä.* $\square$

**4.37 Huomautus.** (i) Yhtälöryhmässä (1) on $n+1$ yhtälöä ja $n$ tuntematonta $x_1, \ldots, x_n$. Yleensä sillä ei ole ratkaisuja. Lagrangen yhtälöryhmässä $(L)$ on $n+1$ tuntematonta $x_1, \ldots, x_n$ ja $\lambda$ ja $n+1$ yhtälöä. Joskus siitä saa ratkaistua $x$-osan tai $f(x)$:n ratkaisematta Lagrangen kertojaa $\lambda$.

(ii) $\lambda$ on reaalinen apumuuttuja, joten on samantekevää käyttääkö sille etumerkkiä $+$ tai $-$.

**4.38 Esimerkki.** (i) Etsi funktion $f(x,y) = xy$ suurin ja pienin arvo ellipsillä $B : \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$.

*Ratkaisu.* Nyt $A = \mathbb{R}^2$ ja $B = g^{-1}(0)$, kun $g(x,y) = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} - 1$. Lagrangen menetelmä:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \nabla g &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x = 0 = y \\ g(x,y) = 0 \end{cases}, \quad \text{ei ratkaisuja}$$

$$\text{(L)} \qquad \left.\begin{aligned} \nabla(f-\lambda g) &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{\lambda}{4}x = 0 \\ x - \lambda y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \frac{\lambda}{4}x = 0 \\ x = \lambda y \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ y - \frac{\lambda^2}{4}y = 0 \ \Rightarrow\ y = 0$ (ei käy;tarkista) tai $\lambda = \pm 2$.

$$\lambda = 2: \qquad \left.\begin{aligned} y - \tfrac{1}{2}x &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 8y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

$$\lambda = -2: \qquad \left.\begin{aligned} y + \tfrac{1}{2}x &= 0 \\ x + 2y &= 0 \\ x^2 + 4y^2 &= 8 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 8y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mp 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Ehdokkaat ääriarvoiksi ovat siis

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 \quad \text{ja} \quad f(-2,1) = f(2,-1) = -2$$

Koska $f$ on jatkuva ja $B$ kompakti, suurin ja pienin arvo ovat olemassa ja saamme tulokseksi, että

$$M = \max f(B) = 2 = f(\pm 2, \pm 1)$$

$$m = \min f(B) = -2 = f(\pm 2, \mp 1).$$

(ii) Etsi funktion $f(x,y) = 3x + 4y$ suurin ja pienin arvo ympyrällä $C : x^2 + y^2 = 1$.

*Ratkaisu.* Nyt $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ ja saadaan yhtälöryhmät

$$\text{(1)} \qquad \left.\begin{aligned} \nabla g &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 = 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}, \quad \text{ei ratkaisuja}$$

$$\text{(L)} \qquad \left.\begin{aligned} \nabla(f-\lambda g) &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2\lambda x = 0 & | \cdot x \\ 4 - 2\lambda y = 0 & | \cdot y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ 3x + 4y = 2\lambda(x^2 + y^2) = 2\lambda$. Toisaalta

$$x = \frac{3}{2\lambda},\ y = \frac{2}{\lambda} \ \Rightarrow\ \frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \ \Rightarrow\ 4\lambda^2 = 9 + 16 = 25 \ \Rightarrow\ \lambda = \pm\frac{5}{2},$$

joten

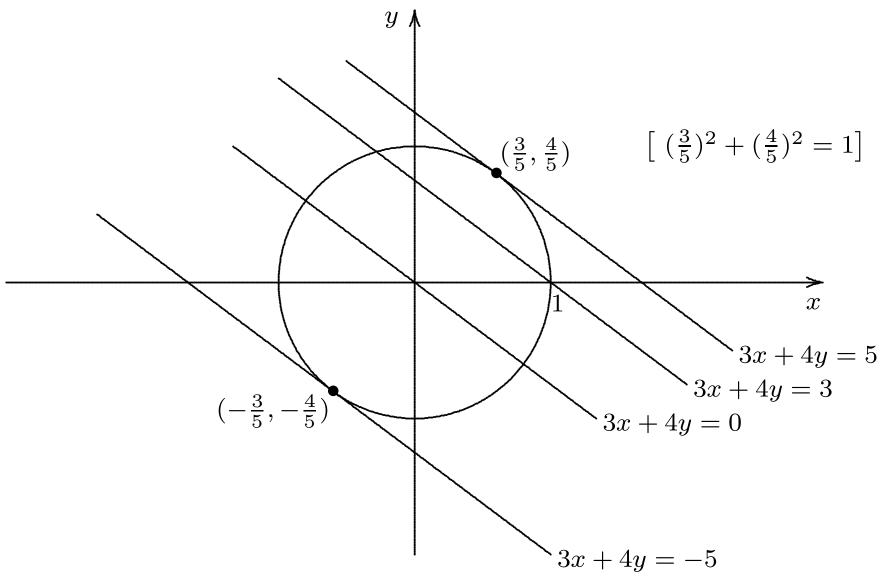
$$f(x,y) = 3x + 4y = 2\lambda = \pm 5$$

yhtälöryhmän (L) ratkaisukolmikossa $(x, y, \lambda)$. Koska ratkaisu on nytkin olemassa ($C = g^{-1}(0)$ on kompakti), on

$$M = \max f(C) = 5$$

$$m = \min f(C) = -5$$

Kuva tilanteesta yhdensuuntaisten suorien $3x + 4y = C$ avulla:




(iii) Määritä pisteen $(x_0, y_0, z_0)$ etäisyys tasosta $T : ax + by + cz + d = 0$ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$) Lagrangen menetelmällä.

*Ratkaisu.* Taso $T$ ei ole kompakti, mutta lyhimmän etäisyyden olemassaolo voidaan silti todistaa sopivia $T$:n kompakteja osia tarkastelemalla (pohdi asiaa!).

Valitaan minimoitavaksi teknisistä syistä etäisyyden neliö

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

ja merkitään $g(x, y, z) = ax + by + cz + d$, jolloin $T = g^{-1}(0)$. Lagrangen menetelmä:

$$(1) \qquad \left.\begin{aligned} \nabla g &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c) = (0, 0, 0) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}, \quad \text{ei ratkaisuja (oletuksen nojalla)}$$

$$(\mathrm{L}) \qquad \left.\begin{aligned} \nabla(f + \lambda g) &= \overline{0} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - x_0) + \lambda a = 0 \\ 2(y - y_0) + \lambda b = 0 \\ 2(z - z_0) + \lambda c = 0 \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Ratkaistaan $x = x_0 - \frac{1}{2}\lambda a$, $y = y_0 - \frac{1}{2}\lambda b$, $z = z_0 - \frac{1}{2}\lambda c$ ja sijoitetaan nämä alimpaan yhtälöön, jolloin saadaan

$$ax_0 - \frac{1}{2}\lambda a^2 + by_0 - \frac{1}{2}\lambda b^2 + cz_0 - \frac{1}{2}\lambda c^2 + d = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\lambda \overset{(*)}{=} \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Yhtälöryhmän (L) kolmesta ylimmästä yhtälöstä seuraa, että

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \\
&= \frac{1}{4}\lambda^2 a^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 b^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 c^2 = \frac{1}{4}\lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) \;\Rightarrow \\
\sqrt{f(x,y,z)} &= \frac{1}{2}|\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \overset{(*)}{=} \underline{\underline{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}}
\end{aligned}$$

Sidosehtoja voi olla myös useampia ja ne voivat olla yhtälö- tai epäyhtälömuotoisia. Esimerkiksi yksikkökiekossa $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ määritellyn funktion $f : B \to \mathbb{R}$ optimointiprobleema voidaan ajatella myös sidotuksi ääriarvotehtäväksi sidosehtona *epäyhtälö* $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \leq 0$. Tällaisessa tulkinnassa on hyödyllistä tutkia *Lagrangen funktiota* $F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$. Esimerkiksi kiekossa $B$ $F$:ään liittyvä ehto

$$(*) \qquad \begin{cases} \nabla(f - \lambda g) = \overline{0} \\ g \leq 0 \end{cases}$$

tavoittaisi arvolla $\lambda = 0$ ne $B$:n sisäpisteet $x$, joissa $f$:n gradientti häviää ja reuna $\partial B$ tulisi tutkituksi $(*)$:een sisältyvän Lagrangen yhtälöryhmän

$$(\mathrm{L}) \qquad \begin{cases} \nabla(f - \lambda g) = \overline{0} \\ g = 0 \end{cases}$$

kautta. Patovaaran monisteessa on hyvä syvällinen esitys optimoinnista Lagrangen funktioiden avulla epäyhtälöillä määritellyissä joukoissa. Tällä kurssilla joudumme tyytymään aiemmin esittämääni menetelmään, jossa Lagrangen funktioita ei tarvittu. Käsittelen kuitenkin vielä yhtälömuotoisten sidosehtojen $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$ tapausta, kun sidosehtoja on useita ($m \geq 1$).

**4.39 Lause** *(Usemman yhtälömuotoisen sidosehdon tapaus)*.
*Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ avoin ja olkoot funktiot $f : A \to \mathbb{R}$ ja $g_i : A \to \mathbb{R}$ ($i = i, \ldots, m$; $m \leq n - 1$) differentioituvia. Olkoon $x_0 \in B = g_1^{-1}(0) \cap \ldots \cap g_m^{-1}(0) \subset A$ rajoittumafunktion $f_B = (f|B) : B \to \mathbb{R}$ lokaali ääriarvokohta. Tällöin $\mathbb{R}^n$:n vektorit*

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)$$

*ovat lineaarisesti riippuvat. Jos erityisesti $\nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_m(x_0)$ ovat lineaarisesti riippumattomat (näin yleensä on, jos* <u>*sidosehdot*</u> *$g_i = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ ovat "järkeviä"), niin on olemassa* <u>*Lagrangen kertojat*</u> *$\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ niin, että $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(x_0)$. Tällöin $x_0$ on* <u>*Lagrangen yhtälöryhmän*</u>

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \nabla\big(f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \ldots - \lambda_m g_m(x)\big) = \overline{0} & (n \text{ yhtälöä}) \\ g_1(x) = 0 & [m+n \text{ yhtälöä} \\ \quad \vdots & \;m+n \text{ tuntematonta} \\ g_m(x) = 0 & \;x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m] \end{cases}$$

*ratkaisun $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ "$x$-osa".*

*Todistus.* Sivuutetaan.

**4.40 Esimerkki.** i) Etsi sylinterin $S : x^2 + y^2 = 1$ ja tason $T : x + y + z = 1$ leikkausjoukon (ellipsi!) origoa lähin ja origosta etäisin piste.

*Ratkaisu.* Nyt $A = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (origoetäisyyden neliö), $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$ ja $g_2(x, y, z) = x + y + z - 1$. Selvästi $g_1$:n ja $g_2$:n gradientit $\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$ ja $\nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)$ ovat lineaarisesti riippumattomat jopa $\mathbb{R}^3$:ssa ja erityisesti siis joukossa $B = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) = S \cap T$. Lagrangen yhtälöryhmä saa nyt muodon

$$\left.\begin{aligned} \nabla(f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2) &= \overline{0} \\ g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ 2y - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ 2z - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ (I)} : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = \frac{\lambda_2}{2 - 2\lambda_1} \\ y = \frac{\lambda_2}{2 - 2\lambda_1} \\ z = \frac{\lambda_2}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \text{(II)} : \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Selvästi (II) $\Rightarrow$ $x = 1 - y$ ja $y^2 - 2y + 1 + y^2 = 1$ $\Rightarrow$ $x = 1 - y$ ja $2y(y - 1) = 0$ $\Rightarrow$ $(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Edelleen (I) $\Rightarrow$ $x = y$ ja $x^2 + y^2 = 1$ $\Rightarrow$ $(x, y) \in \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$, jolloin saadaan $z = 1 - x - y \in \left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$.

Lähin piste $P$ ja etäisin piste $Q$ löytyvät siis joukosta

$$\left\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \sqrt{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \sqrt{2}\right)\right\}$$

Koska

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1-\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 - 2\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2},$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1+\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}, \quad \text{ja}$$

$$1^2 + 0^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1 < 4 - 2\sqrt{2},$$

saamme vastaukseksi:

Origoa $\underline{\text{lähimmät}}$ $S \cap T$:n pisteet ovat pisteet $\underline{(0,1,0) \ \text{ ja } \ (1,0,0)}$ ja origosta $\underline{\text{etäisin}}$ $S \cap T$:n piste on $\underline{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\sqrt{2}\right)}$.

ii) Määritä funktion $f(x,y,z) = 2x+y+2z$ sidotut ääriarvot side-ehdoilla $g_1(x,y,z) = x^2+y^2-4 = 0$ ja $g_2(x,y,z) = x+z-2 = 0$

*Ratkaisu.* $\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$ ja $\nabla g_2 = (1,0,1)$ ovat erisuuntaiset, joten ratkaisu löytyy yhtälöryhmästä

$$\text{(L)} \qquad \left.\begin{aligned} \nabla(f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2) &= \overline{0} \\ g_1 &= 0 \\ g_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ 2 - \lambda_2 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$ tai $x = 0$ (3. ja 1. yhtälö), mutta $\lambda_1 = 0$ ei käy (ristiriita 2. yhtälön kanssa!). Siis $x = 0 \ \Rightarrow \ y = \pm 2$ ja $z = 2$. Ainoat mahdolliset rajoittuman $f|\big(g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)\big)$ ääriarvopisteet ovat siis $(0,-2,2)$ ja $(0,2,2)$. Koska $g_1^{-1}(0)$ ja $g_2^{-1}(0)$ ovat suljettuja, on $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)$ suljettu ja selvästi se on myös rajoitettu. Koska $f$ on kompaktissa $B = g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0)$ jatkuva, $\exists\, M = \max f(B)$ ja $\exists\, m = \min f(B)$. Saamme siis vastauksen

$$\underline{\underline{M = f(0,2,2) = 6}} \qquad \text{ja} \qquad \underline{\underline{m = f(0,-2,2) = 2}}.$$