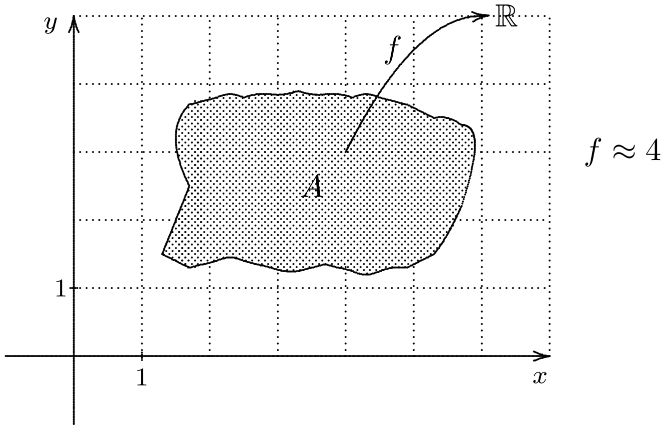
2. Useamman muuttujan funktioiden integraalilaskentaa

Sekä ajankäyttösyistä että pedagogisista syistä otan useamman muuttujan integraalilaskennan heti yhden muuttujan integraalilaskennan jatkoksi. Eräät tarvittavat käsitteet kuten esimerkiksi useamman muuttujan funktioiden jatkuvuus jäävät myöhemmin määriteltäviksi.

Tasointegraali

Keskeinen ajatus: $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ on tasoalueessa A integroituvan reaalifunktion "keskiarvo" kerrottuna A:n alalla.
Kuva:

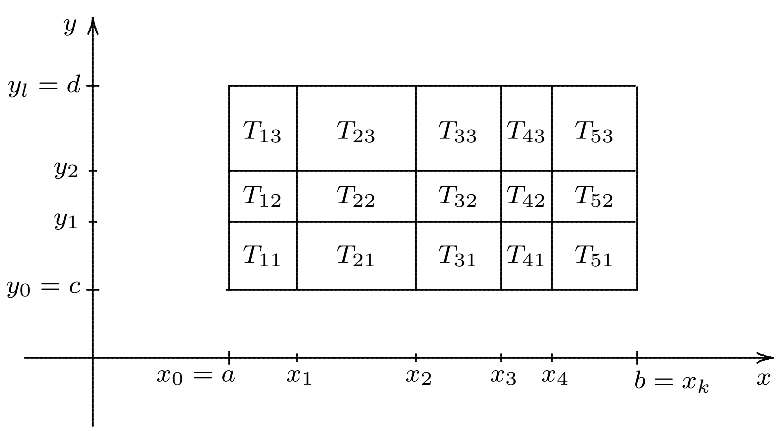


A:n ala $\approx$ 11 (ruutua/cm^2), joten jos esimerkiksi $f(x,y)$ on "likipitäen" vakio 4 A:ssa, niin $\iint\limits_A f(x,y)dxdy \approx 44$. ("likipitäen" sallii sen, että f saa poiketa paljonkin 4:stä pinta-alaltaan hyvin pienissä A:n osissa.)

Täsmällisen määrittelyn aluksi käsitellään tapaus, jossa A on suorakulmio T,

$$T = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

$(a,b,c,d \in \mathbb{R},\ a < b,\ c < d)$, ja $f : T \to \mathbb{R}$ on rajoitettu funktio.
Kuva: T ja sen osasuorakulmiot T_{ij} tapauksessa $k = 5$ ja $l = 3$ (ks. alla).



Nyt x-akselin välin $[a,b]$ jako $D_x = (x_0,\ldots,x_k)$ (ks.1.29) ja y-akselin välin $[c,d]$ jako $D_y = (y_0,\ldots,y_l)$ määrittelevät T:n *jaon* $D = D_x \times D_y$ osasuorakulmioihin

$$T_{ij} = [x_{i-1},x_i] \times [y_{i-1},y_i] \ (i=1,\ldots,k,\ j=1,\ldots,l).$$

Merkitään $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ja $a_{ij} = \Delta x_i \Delta y_i$, T_{ij}:n ala. Olkoon

$$M = \sup(f(T)),\ m = \inf(f(T)),\ M_{ij} = \sup(f(T_{ij})),\ m_{ij} = \inf(f(T_{ij})),\ \text{jolloin}$$

$$m \le m_{ij} \le M_{ij} \le M \ \forall i,j.$$

Määritellään nytkin (vrt. 1.29)

Yläsumma $S_D = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} M_{ij}a_{ij}$,

alasumma $s_D = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} m_{ij}a_{ij}$, ja

Riemannin summat $R_D = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} f(u_{ij})a_{ij} \quad (u_{ij} \in T_{ij})$.

Taaskin $s_D \le R_D \le S_D$ ja $s_{D_1} \le S_{D_2}$ kaikilla T:n jaoilla D_1 ja D_2 ja saadaan määriteltyä

$$f\text{:n } \textit{alaintegraali } \underline{I} = \sup_D s_D \quad \text{ja} \quad f\text{:n } \textit{yläintegraali } \overline{I} = \inf_D S_D$$

yli suorakulmion T. Ne toteuttavat epäyhtälöt

$$m\,a(T) \le s_D \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_D \le M\,a(T),$$

missä $a(T) = (b-a)(d-c)$ on T:n ala.

2.1 Määritelmä. Jos $\underline{I} = \overline{I} = I$, niin f on *integroituva T:ssä (yli T:n)* ja luku

$$I = \int_T f = \int_T f\,da = \iint_T f(x,y)dxdy \in \mathbb{R}$$

on *f:n tasointegraali yli T:n.*

Integroituvuustesti pätee (samalla todistuksella) nytkin:

2.2 Lause. *Rajoitettu funktio $f : T \to \mathbb{R}$ on integroituva yli T:n jos ja vain jos kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa T:n jako D siten, että*

$$S_D - s_D < \epsilon. \quad \square$$

Yleisen rajoitetun joukon A tapauksessa tasointegraali $\int_A f$ määritellään f:n nollajatkon avulla apusuorakulmiota $T \supset A$ käyttäen:

Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ *rajoitettu joukko*, ts. joukko, joka sisältyy johonkin tason suorakulmioon T. Olkoon lisäksi $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Tällöin f:n *nollajatko* on funktio

$$f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f_0(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \notin A \\ f(x,y), & (x,y) \in A. \end{cases}$$

Olkoon T suorakulmio, jolle $A \subset T$.

2.3 Määritelmä. f on *integroituva* yli A:n, jos sen nollajatko f_0 on integroituva yli T:n. Tällöin luku

$$\int_A f = \int_A f da = \iint_A f(x,y)dxdy = \int_T f_0 \in \mathbb{R}$$

on f:n *tasointegraali* yli A:n

Huomautus. Voidaan osoittaa, ettei f_0:n (ja siis f:n) integroituvuus ja integraalin arvo riipu apusuorakulmion $T \supset A$ valinnasta.

Tasointegraalin avulla saadaan nyt suorakulmion pinta-alasta lähtien järkevä määritelmä monimutkaisemmankin osajoukon $A \subset \mathbb{R}^2$ pinta-alalle:

2.4 Määritelmä. Rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}^2$ on *pinta-ala*

$$a(A) = \int_A 1 = \iint_A dxdy \geq 0$$

jos vakiofunktio $1 : A \to \mathbb{R}$ on integroituva yli A:n. Tällöin sanomme, että A on (Riemannin mielessä) *mitallinen*.

2.5 Esimerkki. $A = ([0,1] \times [0,1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$ ei ole mitallinen, sillä suorakulmion $T = [0,1] \times [0,1]$ mielivaltaiselle jaolle D vakiofunktion $1 : A \to \mathbb{R}$ nollajatkolla

$$1_0 : T \to \mathbb{R}, \qquad 1_0(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in A \\ 0, & (x,y) \in T \setminus A \end{cases}$$

pätee ylä- ja alasummille, että

$$S_D = 1, \quad s_D = 0 \;\Rightarrow\; S_D - s_D = 1 \not< \epsilon \in \,]0,1[\,.$$

Perustelu: Jokaisessa D:n osasuorakulmiossa T_{ij} on sekä A:n että $T \setminus A$:n pisteitä (joten aina $M_{ij} = 1$, $m_{ij} = 0$), koska jokaisella välillä on $\mathbb{Q}$:n ja $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:n pisteitä.

2.6 Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ ja $\overline{r}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Joukko

$$B_\epsilon(\overline{r}_0) \; [= U_\epsilon(\overline{r}_0) = B(\overline{r}_0, \epsilon) = N_\epsilon(\overline{r}_0) \text{ jne.}] = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \epsilon^2\}$$

(eli $\overline{r}_0$-keskinen ϵ-säteinen kiekko ilman reunaympyrää) on $\overline{r}_0$:n ϵ-ympäristö [ja

$$B'_\epsilon(\overline{r}_0) \; = U'_\epsilon(\overline{r}_0) = \overset{o}{U}_\epsilon(\overline{r}_0) = \ldots = B_\epsilon(\overline{r}_0) \setminus \{\overline{r}_0\}$$

punkteerattu $\overline{r}_0$*:n* ϵ*-ympäristö*.]

(ii) Piste $\overline{r}_0$ on joukon A

(a) *sisäpiste*, jos $B_\epsilon(\overline{r}_0) \subset A$ jollain $\epsilon > 0$,

(b) *ulkopiste*, jos $B_\epsilon(\overline{r}_0) \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$ jollain $\epsilon > 0$,

(c) *reunapiste*, jos se ei ole sisä- eikä ulkopiste.

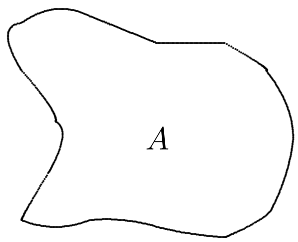
(iii) Joukon A *reuna*

$$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \text{ on } A\text{:n reunapiste}\}.$$

2.7 Esimerkki. i) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \partial A = \mathbb{R}^2$

ii)

[Meille tärkein joukko-tyyppi]



A tämän käyrän rajoittama joukko $\Rightarrow$ ∂A on reunakäyrä

(iii) A kuten 2.5:ssä $\Rightarrow\; \partial A = [0,1] \times [0,1]$

(iv) A äärellinen $\Rightarrow\; \partial A = A$

(v) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; \partial A = A$

Mitallisia joukkoja ja integroituvia funktioita on paljon:

2.8 Lause. *Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu joukko ja $f : A \to \mathbb{R}$ rajoitettu funktio. Tällöin*

(1) A on mitallinen $\Leftrightarrow$ ∂A on mitallinen ja $a(\partial A) = 0$ (ts. ∂A on nollamittainen).

(2) Jos A on mitallinen ja f on A:ssa jatkuva lukuunottamatta mahdollista nollamittaista epäjatkuvuusjoukkoa, niin f on integroituva yli A:n.

(3) Jos $a(A) = 0$, niin f on integroituva yli A:n ja $\int\limits_A f = 0$.

Todistus. Sivuutetaan. (Lauseen sisältö takaa sen, että mitallisuus ja integroituvuus ovat käytännön tilanteissa ”melkein aina” voimassa rajoitetuille A ja f.) $\square$

Tasointegraalille $\int\limits_A f$ pätee lauseen 1.32 vastine:

(i) $$\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g$$

(ii)
$$\int\limits_A cf = c\int\limits_A f$$

(iii)
$$m\,a(A) \le \int\limits_A f \le M\,a(A), \quad m = \inf(f(A)),\; M = \sup(f(A))$$

(iv)
$$\int\limits_{A_1\cup A_2} f = \int\limits_{A_1} f + \int\limits_{A_2} f, \quad \text{kun } a(A_1 \cap A_2) = 0 \text{ ja } A_1 \text{ ja } A_2 \text{ ovat mitallisia}$$

Käytännössä tasointegraali saadaan useimmiten laskettua laskemalla kaksi peräkkäistä määrättyä integraalia. Asiaan liittyvä teoria esitetään seuraavaksi ilman todistuksia. Ensin suorakulmion tapaus:

2.9 Lause. *Olkoon* $T = [a,b] \times [c,d]$ *tason* $\mathbb{R}^2$ *suorakulmio ja* $f : T \to \mathbb{R}$ *integroituva. Jos* $\int_c^d f(x,y)dy = g(x)$ *on olemassa* $\forall x \in [a,b]$, *niin*

$$\int_T f = \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Jos $\int_a^b f(x,y)dx = h(y)$ *on olemassa* $\forall y \in [c,d]$, *niin*

$$\int_T f = \int_c^d h(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy. \quad \square$$

2.10 Huomautus. (i) Esimerkiksi jatkuva funktio $f : T \to \mathbb{R}$ toteuttaa automaattisesti lauseen 2.9 oletukset. Jatkuvalle f pätee siis

$$\int_T f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Näistä integraaleista toinen voi joskus olla helpompi laskea kuin toinen.

(ii) Merkintätapoja:

$$\begin{aligned}
\int_T f &= \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \quad \text{(sulkuja ei tarvita)} \\
&= \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy \quad \left(\int\text{-merkit ja } dx, dy \text{ "samassa järjestyksessä"}\right) \\
&= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx
\end{aligned}$$

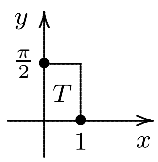
2.11 Esimerkki. i) $T = [0,1] \times [0,1]$, $f(x,y) = x + \frac{1}{2}y$

$$\int_T f = \underbrace{(\text{"}f\text{:n keskiarvo } T\text{:ssä"})}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{(T\text{:n ala})}_{1} \overset{(?)}{=} \frac{3}{4}$$

Verifioidaan yllä oleva arvaus kunnon laskulla:

$$\begin{aligned}
\int_T f &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy(x + \frac{1}{2}y) = \int_0^1 dx \Big/_{\!0}^{1} (xy + \frac{1}{4}y^2) = \\
&= \int_0^1 dx(x \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 - 0) = \int_0^1 (x + \frac{1}{4})dx = \\
&= \Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

ii) $T = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x,y) = y\cos(xy)$



Tässä $\int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} dy\, y\cos(xy)$ on hankala, joten kokeillaan toista järjestystä:

$$\int_T f = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^1 dx\, y\cos(xy) = \int_0^{\pi/2} dy \Big/_{\!0}^{1} \sin(xy) = \int_0^{\pi/2} \sin y\, dy = \Big/_{\!0}^{\pi/2} -\cos y = 1.$$

Jos joukko A on "x-projisoituva" tai "y-projisoituva", $\int_A f$ voidaan palauttaa iteroiduksi integraaliksi apusuorakulmion avulla. Tutkimme tätä.

2.12 Määritelmä. Olkoot g_1 ja g_2 välillä $[a,b]$ jatkuvia reaalifunktioita ja olkoon $g_1(x) \le g_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$. Käyrien $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittama joukko

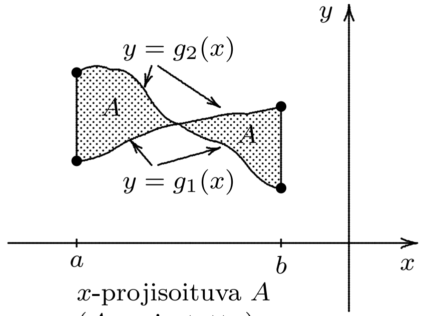
$$A = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \tag{2.13}$$

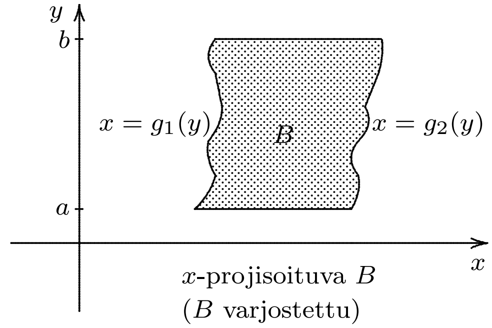
on *x-projisoituva*. Vastaavasti käyrien $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ ja suorien $y = a$ ja $y = b$ rajoittama joukko

$$B = \{(x,y) \mid a \le y \le b,\ g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

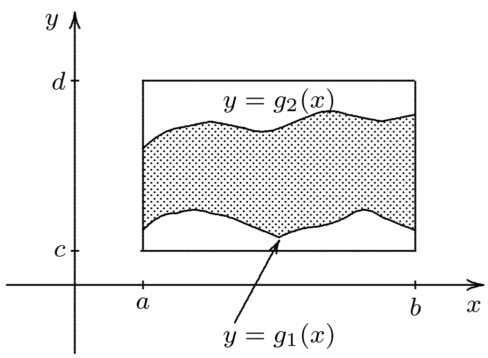
on *y-projisoituva*. Sekä A että B ovat mitallisia.

Kuvat:





Kuvan suorakulmion T avulla saadaan x-projisoituvalla joukolla A kaava tasointegraalille:



$T = [a, b] \times [c, d]$
A kuten 2.13:ssa.
$A \subset T$

$$\int_A f \stackrel{2.3}{=} \int_T f_0 \stackrel{2.9}{=} \int_a^b \left(\int_c^d f_0(x, y) dy \right) dx =$$

[koska $f_0 = 0$, kun $g_1(x) > y$ tai $g_2(x) < y$]

$$= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \stackrel{\text{merk.}}{=} \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, f(x, y) \tag{2.14}$$

2.15 Lause. *(Tasointegraalin laskulause) Olkoon*

$$A = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

x-projisoituva ja $f : A \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin

$$\int_A f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, f(x, y).$$

Jos

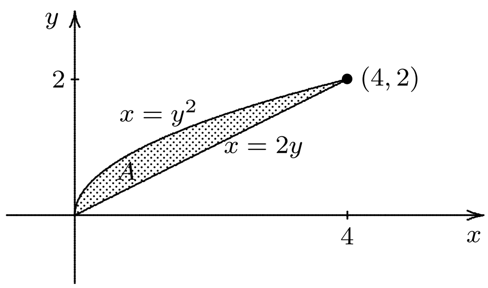
$$A = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

on y-projisoituva, niin

$$\int_A f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, f(x, y). \quad \square$$

2.16 Esimerkki. (i) Laske $\int_A f$, kun $A = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 2,\ y^2 \le x \le 2y\}$ ja $f(x, y) = 10x + 2y$

Ratkaisu.



A on y-projisoituva, joten saadaan, että

$$\int_A f = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} dx (10x + 2y) = \int_0^2 dy \left[\Big/_{y^2}^{2y} (5x^2 + 2xy) \right] \overset{\text{sijoitus } x\text{:ään}}{=}$$

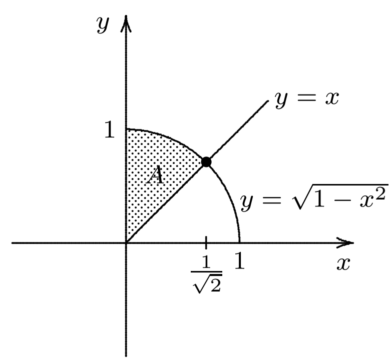
$$= \int_0^2 \left[20y^2 + 4y^2 - 5y^4 - 2y^3\right] dy = \int_0^2 \left(-5y^4 - 2y^3 + 24y^2\right) dy =$$

$$= \Big/_0^2 \left(-y^5 - \frac{1}{2}y^4 + 8y^3\right) = -32 - 8 + 64 = \underline{\underline{24}}.$$

ii) Laske $I = \iint_A \frac{y}{1 + \sqrt{2}\,x} dxdy$, kun $A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$

Ratkaisu.

$$\text{Leikkauspiste:} \quad \left.\begin{array}{l} y = x \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$



Siten

$$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \tfrac{1}{\sqrt{2}},\ x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$$

on x-projisoituva ja

$$\int_A f = \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy\, \frac{y}{1+x\sqrt{2}} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{1+\sqrt{2}\,x} \Big/_{x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y^2}{2} =$$

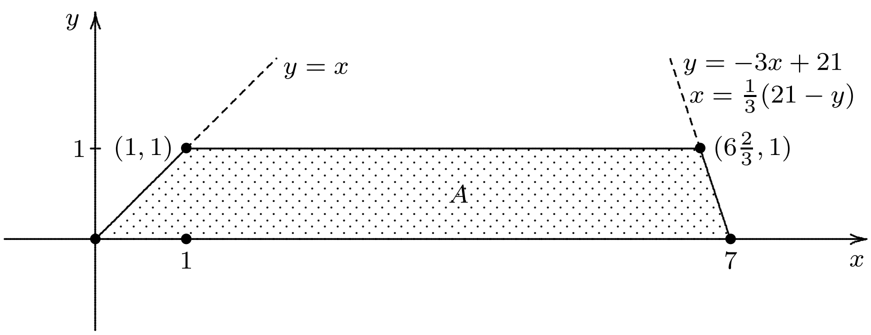
$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1+x\sqrt{2}} \left(\frac{1-x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1-2x^2}{1+x\sqrt{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{1+x\sqrt{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-x\sqrt{2}) dx = \frac{1}{2} \Big/_{0}^{1/\sqrt{2}} (x - \frac{\sqrt{2}}{2} x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{8}}}.$$

iii) Laske $\int_A f$, kun $f(x,y) = y$ ja A on suorien $y=0$, $y=x$, $y=1$ ja $y=-3x+21$ reunustama puolisuunnikas (kuva alla).

Ratkaisu.



$$y = -3x + 21 = 1 \Leftrightarrow -3x = -20 \Leftrightarrow x = 6\tfrac{2}{3}$$

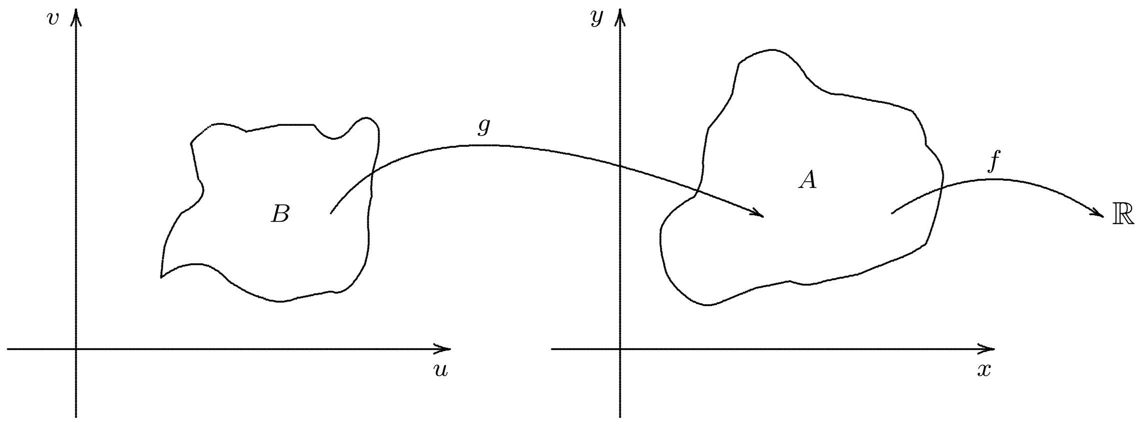
Havaitaan, että x-projisoituvuutta käyttäen integraali hajoaisi lopuksi kolmeksi "palaksi" ylärajafunktion mutkikkuuden vuoksi. Käytetään siksi y-projisoituvuutta:

$$A = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \frac{1}{3}(21-y)\} \quad \text{ja}$$

$$\int_A f = \int_0^1 dy \int_y^{\frac{1}{3}(21-y)} y\, dx = \int_0^1 dy \Big/_{y}^{\frac{1}{3}(21-y)} yx = \int_0^1 y(7 - \frac{1}{3}y - y) dy =$$

$$= \int_0^1 \left(7y - \frac{4}{3}y^2\right) dy = \Big/_{0}^{1} \frac{7}{2}y^2 - \frac{4}{9}y^3 = \frac{7}{2} - \frac{4}{9} = \frac{63-8}{18} = \frac{55}{18} = \underline{\underline{3\frac{1}{18}}}.$$

Tasointegraalien teoriassa määrättyjen integraalien sijoituskeinoa vastaa muuttujain vaihto.



Kun tasointegraalissa $\int\limits_A f(x,y)dxdy$ halutaan suorittaa muuttujan vaihto kuvauksen $g : B \to A$, $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$, avulla täytyy x korvata $x(u,v)$:llä ja y $y(u,v)$:llä ja lisäksi on otettava huomioon pintamittojen paikallinen muuntuminen siirryttäessä integroimaan joukon B yli. Viimeksi mainitun tekee g:n *Jacobin determinantin*

$$J_g = \begin{vmatrix} D_u x(u,v) & D_v x(u,v) \\ D_u y(u,v) & D_v y(u,v) \end{vmatrix} \quad \text{itseisarvo}$$

(2.17)

$$|J_g| = |(D_u x)(D_v y) - (D_v x)(D_u y)|.$$

(Tässä D_u on derivointi u:n suhteen ja D_v v:n suhteen.)

Jos kuvaus $g : B \to A$ on jatkuvasti derivoituva ”melkein bijektio” (joko g on injektio ja $A \setminus g(B)$ on nollamittainen tai g on surjektio ja ne A:n pisteet, joille g vie useamman kuin yhden B:n pisteen muodostavat nollamittaisen A:n osajoukon), saamme siis muuttujanvaihtokaavan

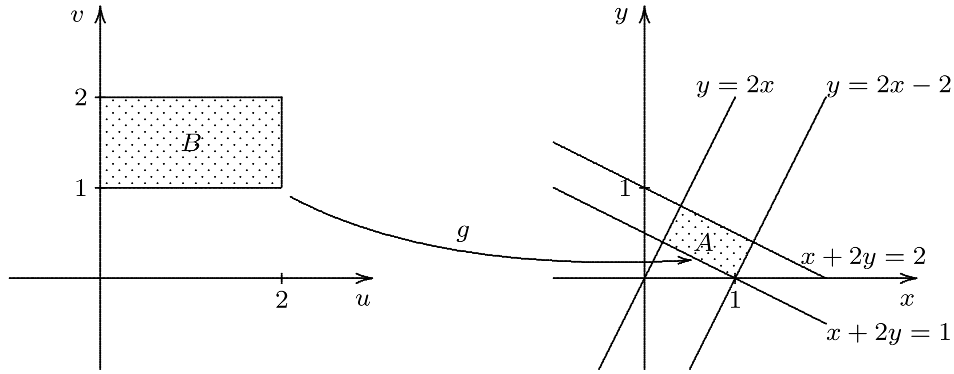
$$\int\limits_A f = \int\limits_B (f \circ g)|J_g| \qquad \text{eli}$$

(2.18)

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_B f\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J_g(u,v)|dudv$$

2.19 Esimerkki. Olkoon A suorakulmio, jota rajoittavat suorat $y = 2x$, $y = 2x-2$, $x + 2y = 1$ ja $x + 2y = 2$. Laske $I = \int\limits_A f$, kun $f(x,y) = \dfrac{x}{x+2y}$.

Ratkaisu.



Sijoitetaan

$$(x,y) = g(u,v), \qquad \begin{cases} u = 2x - y \\ v = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}(2u+v) \\ y = \frac{1}{5}(-u+2v), \end{cases}$$

jolloin $g(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = \frac{1}{5}(2u+v, -u+2v)$ ja

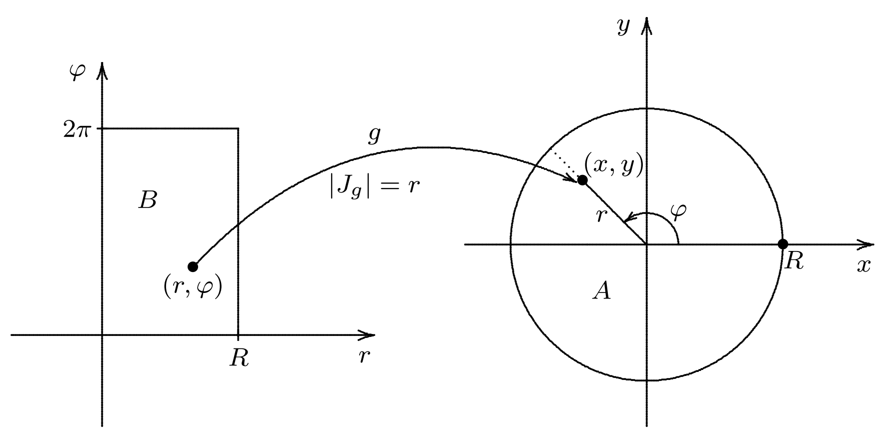
$$J_g(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \qquad \text{ja} \qquad g(B) = A,$$

missä $B = [0,2] \times [1,2]$, joka on helpommin käsiteltävä suorakulmio. Nyt g on (tarkka) bijektio $A \to B$ ja saamme

$$\int_A f = \int_B (f \circ g)|J_g| = \iint_B \frac{2u+v}{5v} \cdot \left|\frac{1}{5}\right| dudv = \frac{1}{25} \int_0^2 du \int_1^2 dv \left(\frac{2u}{v} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{25} \int_0^2 du \Big/_1^2 (2u \ln v + v) = \frac{1}{25} \int_0^2 (2u \ln 2 + 1) du = \ldots = \underline{\underline{\frac{4 \ln 2 + 2}{25}}}.$$

Tärkein muuttujain vaihto on siirtyminen **napakoordinaatteihin** (vrt. 1.53):



Muunnos $g(r,\varphi) = \big(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\big) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ kuvaa (r,φ)-tason suorakulmion $B = [0,R] \times [0,2\pi]$ melkein bijektiivisesti kiekolle $\overline{B}_R\big((0,0)\big) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le R^2\}$ ja sen Jacobin determinantti on r:

$$J_g(r,\varphi) = \begin{vmatrix} D_r x & D_\varphi x \\ D_r y & D_\varphi y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_r(r\cos\varphi) & D_\varphi(r\cos\varphi) \\ D_r(r\sin\varphi) & D_\varphi(r\sin\varphi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \quad (\ge 0).$$

Muuttujanvaihtokaavan (2.18) nojalla saadaan nyt integroituvalle $f : A \to \mathbb{R}$ $(A = \overline{B}_R(0,0))$ kaava

$$\int_A f = \iint_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi. \tag{2.20}$$

2.21 Esimerkki.

(i)
$$\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2\,dx\,dy = \iint_{\overline{B}_1(\overline{0})} x^2\,dx\,dy =$$

$$\overset{(2.20)}{=} \iint_B r^2\cos^2\varphi \cdot r\,dr\,d\varphi \quad (\text{tässä } B = [0,1]\times[0,2\pi])$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^3 \cos^2\varphi = \left(\int_0^1 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\,d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

(ii) Lasketaan puolikiekon $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ *keskiö*

$$\frac{1}{a(A)}\left(\iint_A x\,dx\,dy, \iint_A y\,dx\,dy\right).$$

Nyt $g : [0,1]\times[0,\pi] \to A$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, on jatkuvasti derivoituva melkein bijektio (sillä rajat on valittu oikein, ts. napakoordinaattimuunnos "piirtää" A:n kertaalleen näillä rajoilla: $x^2+y^2 \le r^2 = 1$ ja $\varphi \in [0,\pi] \;\Leftrightarrow\; y = r\sin\varphi \ge 0$. Tässä " $\Leftrightarrow$ " on voimassa koska $0 \le \varphi \le 2\pi$.)

Nyt $a(A) \overset{1.48}{=} \frac{\pi}{2}$ ja ilmeisesti $\iint\limits_A x dx dy = 0$ (x:n keskiarvo A:ssa on 0):

$$\iint\limits_A x dx dy = \int_0^r dr \int_0^\pi d\varphi\, r\cos\varphi \cdot r = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\Big/_{\!0}^{\pi} \sin\varphi\right) = 0$$

Edelleen

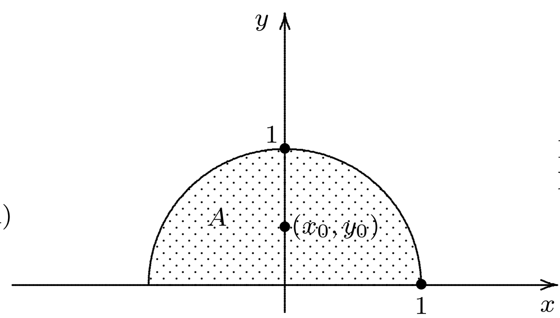
$$\iint\limits_A y dx dy = \int_0^r dr \int_0^\pi d\varphi\, r\sin\varphi \cdot r = \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\Big/_{\!0}^{\pi} (-\cos\varphi)\right) = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

Siis A:n keskiö on

$$\frac{2}{\pi}\left(0, \frac{2}{3}\right) = \left(0, \frac{4}{3\pi}\right).$$

Kuva:

(A varjostettu)



Puolikiekon A
keskiö $(x_0, y_0) = (0, \frac{4}{3\pi})$
$\frac{4}{3\pi} \approx 0.4244$

Jos kiekon keskipiste on (x_0, y_0) (eikä siis origo), käytetään muunnosta

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi \\ y = y_0 + r\sin\varphi \end{cases}$$

(napakoordinaatit ”napana” (x_0, y_0)).

2.22 Esimerkki. Laske $\iint\limits_A x dx dy$ kun A on $(1,0)$-keskinen ympyrärengas

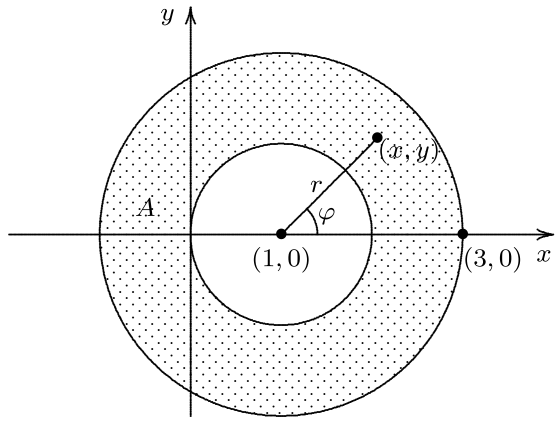
$$A = \{(x, y) \mid 1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Ratkaisu. $f(x, y) = x$ on jatkuva ja muunnos

$$g : B = [1, 2] \times [0, 2\pi] \to A, \quad g(r, \varphi) = (1 + r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

on jatkuvasti derivoituva melkein bijektio ja $|J_g| = r$.

Kuva (A varjostettu):



Valitaan $1 \leq r \leq 2$ ja $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, jolloin A "peittyy" melkein bijektiivisesti muunnoksella g. Siten

$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_1^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi (1 + r\cos\varphi)\cdot r = \int_1^2 r\,dr \Big/_0^{2\pi} (\varphi + r\sin\varphi) =$$

$$= 2\pi \int_1^2 r\,dr = 2\pi \Big/_1^2 \frac{1}{2}r^2 = \underline{\underline{3\pi}}.$$

Avaruusintegraalit

Avaruuden $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ suorakulmaisissa särmiöissä

$$T = [a,b] \times [c,d] \times [s,t] = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ s \leq z \leq t\}$$

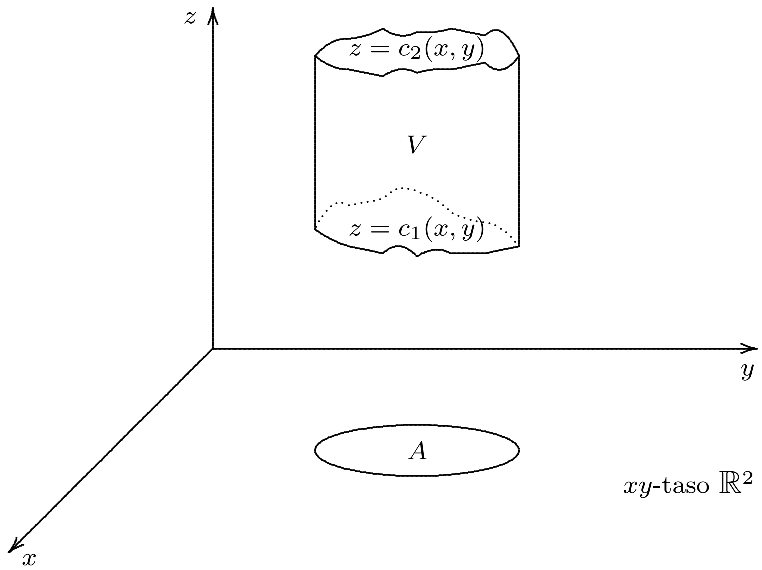
määritellyn rajoitetun funktion $f : T \to \mathbb{R}$ integraali $\int_T f$ (f:n keskiarvo kerrottuna T:n tilavuudella) määritellään välien $[a,b]$, $[c,d]$ ja $[s,t]$ jakojen D_x, D_y ja D_z määrittelemän T:n jaon $D = D_x \times D_y \times D_z$ (osasärmiöihin) avulla aivan kuten tasointegraali. Sama menettelytapa yleistyy myös korkeampiulotteisiin $\mathbb{R}^n$:n ($n \geq 4$) särmiöihin. Yleinen integroimisjoukko $A \subset \mathbb{R}^3$ (tai $A \subset \mathbb{R}^n$) käsitellään apusärmiön $T \supset A$ ja f:n nollajatkon f_0 avulla aivan kuten tasotapauksessa. Sivuutamme yksityiskohtaiset tarkastelut ja keskitymme laskutekniikkoihin.

Samaistetaan $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ kuvauksen $(x,y) \mapsto (x,y,0)$ välityksellä, ts. ajatellaan $\mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^3$:n xy-tasoksi. Joukko
(2.23)

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A \subset \mathbb{R}^2,\ A \text{ mitallinen},\ c_1(x,y) \leq z \leq c_2(x,y)\}$$

on *xy-projisoituva*, jos $c_1 : A \to \mathbb{R}$ ja $c_2 : A \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja $c_2 \geq c_1$.

Kuva:



Jos V on xy-projisoituva kuten yllä ja $f : V \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin

$$\int_V f = \iint_A \left(\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

Jos tässä $A = \{(x,y) \mid a_1 \le x \le a_2,\ b_1(x) \le y \le b_2(x)\}$ on x-projisoituva, avaruusintegraali $\int_V f$ palautuu kolminkertaiseksi iteroiduksi integraaliksi

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1(x)}^{b_2(x)} \left[\int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right) dx = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} dx \int_{b_1(x)}^{b_2(x)} dy \int_{c_1(x,y)}^{c_2(x,y)} dz\, f(x,y,z) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Kaavoissa (2.23) ja (2.24) projektiosuunnat ovat tilanteen mukaan (yz- ja zx-projisoituvat V, y- ja z-projisoituvat A jne.) vaihdettavissa. Jos esimerkiksi kaavan (2.23) V:llä on myös esitys

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y,z) \in B,\ d_1(y,z) \le x \le d_2(y,z)\},$$

missä B on yz-tason z-projisoituva osajoukko $B = \{(y,z) \mid e_1 \le z \le e_2,\ g_1(z) \le y \le g_2(z)\}$, niin kaavan (2.24) integraali saadaan myös muodossa

$$\int_V f = \int_{e_1}^{e_2} dz \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} dy \int_{d_1(y,z)}^{d_2(y,z)} dx\, f(x,y,z)$$

ja joskus tämä voi olla helpompi laskea kuin (2.24) tai toisin päin.

2.25 Esimerkki.

i) Lasketaan $\int\limits_T f$, kun $T = [0,1] \times [0,2] \times [0,3]$ ja $f(x,y,z) = x + y + z$.

Arvaus: $\int\limits_T f = (\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2}) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) = 3 \cdot 6 = 18$. ($x$:n keskiarvo $\frac{1}{2}$, y:n 1 ja z:n $\frac{3}{2}$ ja T:n tilavuus 6).

Lasku:

$$\int\limits_T f = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^3 dz(x+y+z) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy \Big/_0^3 (xz + yz + \frac{1}{2}z^2) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 dy(3x + 3y + \frac{9}{2}) = \int\limits_0^1 dx \Big/_0^2 (3xy + \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{2}y) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx(6x + 6 + 9) = \Big/_0^1 (3x^2 + 15x) = \underline{\underline{18}}.$$

ii) Lasketaan $\int\limits_V f$, kun $f(x,y,z) = z^2$ ja $V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le y \le z \le 1\}$. Nyt

$$V = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in A,\ y \le z \le 1\},$$

kun

$$A = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y \le 1\} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\},$$

joten V on xy-projisoituva ja A y-projisoituva. Siten

$$\int\limits_V f = \iint\limits_A \left(\int\limits_y^1 z^2 dz \right) dxdy = \iint\limits_A (\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y^3) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y dx(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}y^3) = \int\limits_0^1 \frac{1}{3}(1 - y^3) y dy = \ldots = \underline{\underline{\frac{1}{10}}}.$$

Muuttujanvaihto avaruusintegraalissa sujuu tasointegraalin teoriasta tuttuun tyyliin:

Jos integraalissa $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ halutaan siirtyä uusiin muuttujiin u, v, w jatkuvasti derivoituvan melkein bijektiivisen muunnoksen $g : B \to V$, $g(u,v,w) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ avulla, on muistettava ottaa huomioon tilavuuksien paikallinen muuntuminen. Tämän tekee g:n Jacobin determinantin

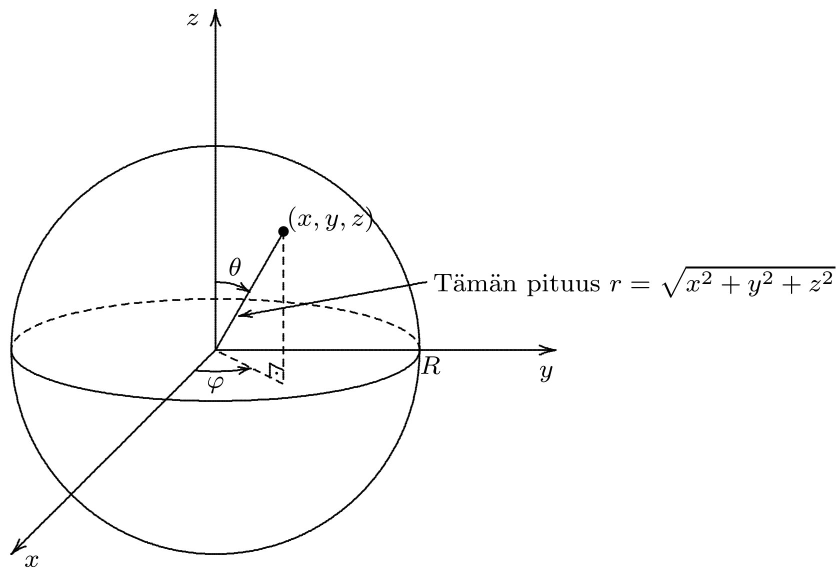
$$J_g = \begin{vmatrix} D_u x & D_v x & D_w x \\ D_u y & D_v y & D_w y \\ D_u z & D_v z & D_w z \end{vmatrix} \quad \big(= J_g(u,v,w)\big)$$

itseisarvo $|J_g|$. Saamme kaavan

(2.26)
$$\int_V f = \int_B (f \circ g)|J_g| =$$
$$= \iiint_B f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)|J_g(u,v,w)|dudvdw$$

Tärkeimpiä muuttujanvaihtoja ovat siirtymiset *pallokoordinaatteihin* tai *sylinterikoordinaatteihin.*

Pallokoordinaatit.



$\mathbb{R}^3$:n kuulan $A = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$ pisteellä (x,y,z) on esitys ns. *pallokoordinaattien* avulla:

$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$ missä
$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, pisteen (x,y,z) etäisyys origosta $(0 \le r \le R)$,
$\theta =$ pisteen (x,y,z) paikkavektorin ja positiivisen z-akselin välinen kulma $(0 \le \theta \le \pi)$,
$\varphi =$ projektiopisteen $(x,y,0)$ napakulma xy-tasossa $(0 \le \varphi \le 2\pi)$.

Pallokoordinaattimuunnos $g : \overbrace{[0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]}^{B} \to A$,

$$g(r,\theta,\varphi) = (x,y,z) = \big(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta\big),$$

on suorakulmaisen särmiön B jatkuvasti derivoituva melkein bijektio A:lle. Edelleen

$$J_g = \begin{vmatrix} D_r x & D_\theta x & D_\varphi x \\ D_r y & D_\theta y & D_\varphi y \\ D_r z & D_\theta z & D_\varphi z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{laske}}{=} r^2\sin\theta \ (\geq 0)$$

ja saamme A:ssa integroituvalle funktiolle $f : A \to \mathbb{R}$ muuttujanvaihtokaavan

(2.27)
$$\int_A f = \int_B (f\circ g)|J_g| \quad \text{eli}$$
$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta$$

2.28 Esimerkki. i) Lasketaan pallokoordinaateilla R-säteisen pallon (kuulan) A tilavuus $\int_A 1 = \mathrm{vol}(A)$

$$\mathrm{vol}(A) = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1\cdot r^2\sin\theta = \left(\int_0^R r^2 dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) =$$
$$= \frac{1}{3}R^3\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

ii) Lasketaan puolipallon $A = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z\geq 0\}$ keskiö

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(A)}\left(\iiint_A xdxdydz, \iiint_A ydxdydz, \iiint_A zdxdydz\right) = (x_0,y_0,z_0)$$

Ilmeisesti $x_0 = y_0 = 0$ symmetriasyistä, ja $\dfrac{1}{\mathrm{vol}(A)} = \dfrac{3}{2\pi}$ kohdan i) nojalla. Koska puolipallossa A on $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, saadaan

$$\iiint\limits_A z dx dy dz = \int_0^R dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta =$$

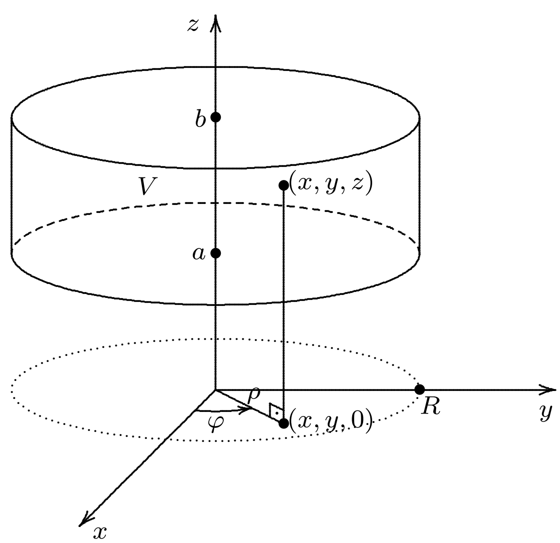
$$= \left(\int_0^R r^3 dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin(2\theta)} d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \Big/_0^{\pi/2} - \frac{\cos(2\theta)}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4},$$

joten

$$\underline{\underline{(x_0, y_0, z_0)}} = \left(0, 0, \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2\pi}\right) = \underline{\underline{\left(0, 0, \frac{3}{8}\right)}}.$$

Sylinterikoordinaatit. Jos $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ a \le z \le b\}$, käytetään V:n pisteiden esittämiseen usein *sylinterikoordinaatteja* ρ, φ, z: Pari (ρ, φ) on projektion $(x, y) = (x, y, 0)$ napakoordinaattiesitys xy-tasossa ja $z = z$.
Kuva: (V on kuvan sylinteri)



$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (0 \le \rho \le R)$

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$a \le z \le b$

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$

$$g : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [a, b] \to V, \quad g(\rho, \varphi, z) = (x, y, z) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$$

on jatkuvasti derivoituva melkein bijektio ja

$$J_g = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\ (\ge 0),$$

joten saamme sylinterikoordinaattien muuttujanvaihtokaavan

(2.29)
$$\int\limits_V f = \int\limits_B (f\circ g)|J_g| \quad \text{eli}$$
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^b dz\, f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho$$

2.30 Esimerkki. i) Lasketaan sylinterin $A\times[7,9]=V$ tilavuus, kun $A=\{(x,y)\mid (x-2)^2+(y-3)^2\le 4\}$ on $(2,3)$-keskinen 2-säteinen kiekko. Nyt

$$g(\rho,\varphi,z)=(x,y,z)=(2+\rho\cos\varphi, 3+\rho\sin\varphi, z)$$

on suorakulmaisen särmiön $[0,2]\times[0,2\pi]\times[7,9]$ melkein bijektiivinen jatkuvasti derivoituva surjektio V:lle ja $|J_g|=\rho$ (vakiot 2 ja 3 häviävät derivoinneissa). Siten

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(V) &= \int\limits_V 1 = \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_7^9 dz\cdot\rho = \left(\int\limits_0^2 \rho d\rho\right)\left(\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\right)\left(\int\limits_7^9 dz\right)\\ &= \left(\Big/_{\!0}^{2} \frac{\rho^2}{2}\right)\cdot 2\pi\cdot 2 = \underline{\underline{8\pi}}.\end{aligned}$$

kuten pitikin (pohjan ala $\pi\cdot 2^2$, korkeus 2).

ii) Olkoon $A=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 2,\ 0\le y\}$ ja $V=A\times[1,2]$. Nyt V saadaan sylinterikoordinaateilla rajoin $1\le\rho\le\sqrt{2}$, $0\le\varphi\le\pi$, $1\le z\le 2$ bijektiivisesti, joten esimerkiksi

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V (\underbrace{x^2+y^2}_{\rho^2}+z^2)dxdydz &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} d\rho \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_1^2 dz(\rho^2+z^2)\cdot\rho = \\ &= \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int\limits_0^{\pi} d\varphi \Big/_{\!1}^{2} \left(\rho^2 z+\frac{z^3}{3}\right) = \pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho d\rho \left(2\rho^2+\frac{8}{3}-\rho^2-\frac{1}{3}\right) = \\ &= \pi \int\limits_1^{\sqrt{2}} \rho\left(\rho^2+\frac{7}{3}\right)d\rho = \pi \Big/_{\!1}^{\sqrt{2}} \frac{\rho^4}{4}+\frac{7}{6}\rho^2 = \pi\left(\frac{4}{4}+\frac{7}{6}\cdot 2-\frac{1}{4}-\frac{7}{6}\right) = \\ &= \pi\left(\frac{3}{4}+\frac{7}{6}\right) = \underline{\underline{\frac{23\pi}{12}}}.\end{aligned}$$

Eräissä tapauksissa $\int\limits_A f$ voidaan määritellä, vaikka integroimisjoukko A ja/tai integroitava funktio f eivät olisi rajoitettuja. Tämä tehdään sopivilla raja-arvotarkasteluilla, joista yksinkertaisimmat liittyvät merkin säilyttävään funktioon f. Keskitymme näihin esittelemällä pari perustapausta. Merkin säilyttävällä f rajankäynneissä voi käyttää tietyntyyppisiä testijoukkoja.

Olkoon ensin $A \subset \mathbb{R}^2$ mitallinen (ts. $a(\partial(A) = 0)$ ja rajoitettu, $\overline{r}_0 = (x_0, y_0) \in A$, $B = A \setminus \{\overline{r}_0\}$ ja $f : B \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos f on rajoitettu ja positiivinen joukoissa

$$A_\epsilon = A \setminus \overbrace{B_\epsilon(\overline{r}_0)}^{\text{(ks. 2.6.i)}} = \{(x, y) \in A \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \geq \epsilon\} \quad (\epsilon > 0),$$

niin määritellään f:n *epäoleellinen tasointegraali*

$$\text{(2.31)} \qquad \int\limits_A f = \lim_{\epsilon \to 0} \int\limits_{A_\epsilon} f \in \mathbb{R} \quad \text{(Idea: } A_\epsilon\text{"} \to \text{"}A \text{ kun } \epsilon \to 0. \text{ Piirrä kuvio!)}$$

edellyttäen, että oikeanpuoleinen raja-arvo on olemassa ja reaalinen. Tällöin sanotaan, että $\int\limits_A f$ *suppenee*; muuten se *hajaantuu*.

2.32 Esimerkki. Olkoon $A = \overline{B}_1(\overline{0}) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ origokeskinen yksikkökiekko. Tutkitaan epäoleellisen integraalin $\int\limits_A f$ suppenemista, kun

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in A \setminus \{\overline{0}\}.$$

Nyt $A_\epsilon = A \setminus B_\epsilon(\overline{0})$ on origokeskinen ympyrärengas (sisäsäde ϵ, ulkosäde 1) ja siten

$$\int\limits_{A_\epsilon} f \overset{\text{napak.}}{=} \int\limits_\epsilon^1 dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{r} \cdot r = 2\pi \Big/_{\epsilon}^{1} r = 2\pi(1 - \epsilon) \to 2\pi, \quad \text{kun } \epsilon \to 0,$$

joten epäoleellinen integraali $\int\limits_A f$ *suppenee* kohti lukua 2π:

$$\int\limits_{0 < x^2 + y^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = 2\pi$$

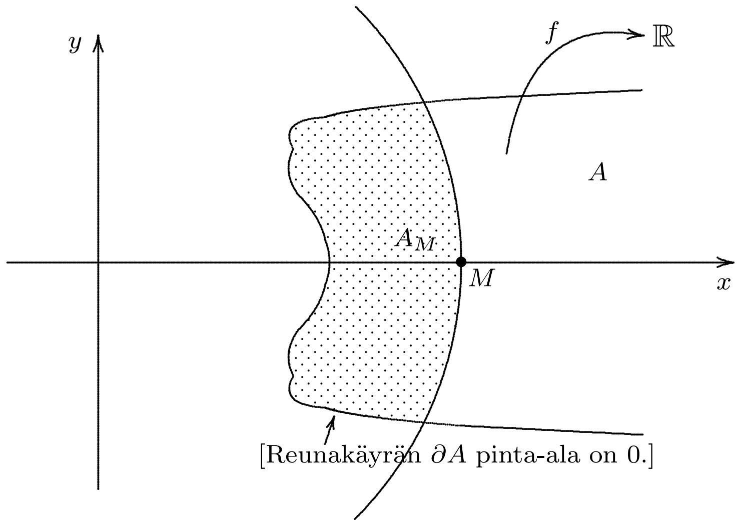
Olkoon sitten f rajoitettu ja positiivinen A:ssa, mutta A rajoittamaton. Jos f on jatkuva ja ∂A nollamittainen, niin A:n rajoitetuissa osissa $A_M = A \cap B_M(\overline{0})$ (ks.

kuva) f on integroituva: Kyllin suurilla M, $A_M \neq \emptyset$ ja on olemassa $\int\limits_{A_M} f$. Tällöin määritellään

$$\int\limits_A f = \lim_{M\to\infty} \int\limits_{A_M} f \in \mathbb{R} \tag{2.33}$$

edellyttäen, että oikeanpuoleinen raja-arvo on olemassa ja reaalinen. Tässä tapauksessa sanomme, että epäoleellinen integraali $\int\limits_A f$ *suppenee*; muuten se *hajaantuu*.

Kuva (A_M varjostettu):



2.34 Esimerkki. Olkoon $A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ ja $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Nyt arvoilla $M > 1$, $A_M = \{(x,y) \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq M\}$ on origokeskinen ympyrärengas (sisäsäde 1, ulkosäde M) ja napakoordinaatteihin siirtymällä saadaan

$$\int\limits_{A_M} f = \int\limits_1^M dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{1}{r} \cdot r = 2\pi \Big/_1^M r = 2\pi(M-1) \xrightarrow[M\to\infty]{} \infty$$

Siten $\int\limits_A f$ *hajaantuu* (vrt. esim. 2.32).

Tärkeä erikoistapaus suppenevista tasointegraaleista ovat tiheysfunktiot

2.35 Määritelmä. Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on *tiheysfunktio*, jos

$$f(x,y) \geq 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{ja} \quad \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1.$$

2.36 Huomautus. Jos satunnaisvektorilla $Z = (X, Y)$ (X ja Y ovat satunnaismuuttujia) on tiheysfunktiona $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, niin jokaisella tason mitallisella (reunaltaan nollamittaisella) osajoukolla A luku

$$P(Z \in A) = \iint\limits_A f(x,y)dxdy$$

on sen tapahtuman todennäköisyys, että $Z = (X, Y)$ ”osuu” A:han.

2.37 Esimerkki. a) Lasketaan $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

Nyt $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ja (2.33):n $A = \mathbb{R}^2$ ja $A_M = B_M(\overline{0})$ on M-säteinen origokeskinen kiekko. Siirtymällä napakoordinaatteihin saadaan, että

$$\int\limits_{A_M} f = \int\limits_0^M dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-r^2} \cdot r = 2\pi \Big/_0^M \frac{-e^{-r^2}}{2} = \pi\left(-e^{-M^2} - (-1)\right) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \pi.$$

Kaavan (2.33) nojalla on siis

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi \tag{2.38}$$

b) Osoitetaan edellisen esimerkin integraalin (2.38) avulla, että $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ kuten esimerkissä 1.63(iii) luvattiin. Tätä varten riittää näyttää, että

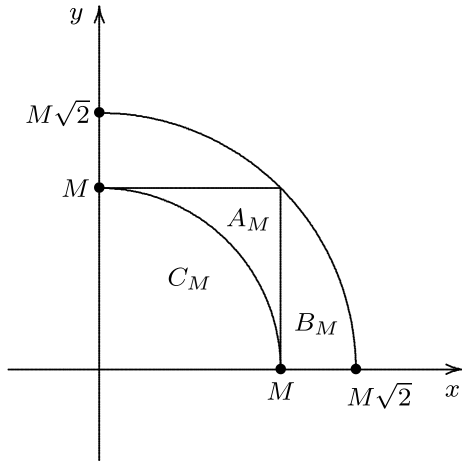
$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$$

ja tähän riittää symmetriasyistä todistaa kaava

$$\left(\int\limits_0^M e^{-x^2}dx\right)^2 \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

(integraali yli ensimmäisen neljänneksen $x > 0$, $y > 0$ on neljäsosa integraalista yli koko tason).

Kuva



Neliötä A_M ”ympäröivät” neljänneskiekot C_M (sisältä) ja B_M (ulkoa)

Merkitään $A_M = [0, M] \times [0, M]$ $\{B_M = (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2M^2,$ $x \geq 0,\ y \geq 0\}$ ja $\{C_M = (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq M^2,$ $x \geq 0,\ y \geq 0\}$, jolloin neljänneskiekot C_M, ja B_M ovat kuten kuvassa, $C_M \subset A_M \subset B_M$.

Koska $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} > 0$, on kaikilla $M > 0$

$$\int\limits_{C_M} f \leq \int\limits_{A_M} f \leq \int\limits_{B_M} f$$

Kohdan a) nojalla on

$$\int\limits_{C_M} f \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4} \quad \text{ja} \quad \int\limits_{B_M} f \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4},$$

joten kuristusperiaatteen nojalla

$$\int\limits_{A_M} f \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Mutta toisaalta

$$\int\limits_{A_M} f = \int\limits_0^M \int\limits_0^M e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \left(\int\limits_0^M e^{-x^2} dx\right)\left(\int\limits_0^M e^{-y^2} dy\right) = \left(\int\limits_0^M e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Siis

$$\left(\int\limits_0^M e^{-x^2} dx\right)^2 \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}$$

kuten pitikin.

c) a-kohdan nojalla $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy = \pi$, joten funktio
$g(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-x^2-y^2}$ on eräs tiheysfunktio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$g(x,y) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dxdy = 1.$$

Epäoleellisia avaruusintegraaleja ja korkeampiulotteisia epäoleellisia integraaleja määritellään ja käsitellään epäoleellisten tasointegraalien esittelyssä opitulla tavalla. Tyydymme yhteen esimerkkiin:

2.39 Esimerkki.
Olkoon $V = \{(x,y,z) \mid x \geq 1,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$ ja $f(x,y,z) = \dfrac{2}{(x+y+z)^3}$.
Suppeneeko $\int\limits_V f$?

Ratkaisu. Koska $f(x,y,z) > 0\ \forall (x,y,z) \in V$, voidaan laajenevina joukkoina käyttää kuulien sijaan myös esimerkiksi keskenään yhdenmuotoisia särmiöitä tutkittaessa integraalin $\int\limits_V f$ suppenemista (vrt. esimerkki 2.36 b). Merkitään

$$C(a) = [1,a] \times [0,a] \times [0,a] \ (a > 0), \text{ jolloin}$$

$$\int\limits_{C(a)} f = \int\limits_1^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a dz \, \frac{2}{(x+y+z)^3} = -\int\limits_1^a dx \int\limits_0^a dy \Big/_{\!0}^{a} \frac{1}{(x+y+z)^2} =$$

$$= -\int\limits_1^a dx \int\limits_0^a dy \left(\frac{1}{(x+y+a)^2} - \frac{1}{(x+y)^2} \right) = \int\limits_1^a dx \Big/_{\!0}^{a} \left(\frac{1}{x+y+a} - \frac{1}{x+y} \right) =$$

$$= \int\limits_1^a \left(\frac{1}{x+2a} - \frac{2}{x+a} + \frac{1}{x} \right) dx = \Big/_{\!1}^{a} (\ln|x+2a| - 2\ln|x+a| + \ln|x|) =$$

$$= \Big/_{\!1}^{a} \ln\left| \frac{(x+2a)x}{(x+a)^2} \right| = \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{1+2a}{(1+a)^2} =$$

$$= \ln\frac{3}{4} - \ln\frac{\frac{1}{a}+2}{a+2+\frac{1}{a}} \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \ln\frac{3}{4} - (-\infty) = \infty.$$

Vastaus: Ei suppene.