MATEMAATTISEN ANALYYSIN JATKOKURSSI

Juha Partanen

1. Yhden muuttujan funktioiden integraalilaskentaa

Yhden muuttujan funktioiden integraalilaskennassa esiintyy kaksi peruskäsitettä: määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ ja määräämätön integraali $\int f(x)dx$. Aloitamme jälkimmäisellä, koska se on derivoimisen käänteistoimitus ja koska sen avulla voidaan usein laskea sovelluksissa tärkeät määrätyt integraalit.

1.1 Määritelmä. Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : I \to \mathbb{R}$ funktio. Funktio $F : I \to \mathbb{R}$ on funktion f *integraalifunktio*, jos $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. Tällöin merkitään $F(x) = \int f(x)dx$.

1.2 Huomautus. (a) Derivoituvana jokainen integraalifunktio $F : I \to \mathbb{R}$ on aina jatkuva välillä I.
(b) Seuraava lause osoittaa, että integraalifunktio on vain ns. *integroimisvakiota* vaille yksikäsitteinen. Se nojaa väliarvolauseeseen, joten tässä on tärkeää, että integroimista tehdään nimenomaan jollain välillä I.

1.3 Lause. *Jos F on f:n integraalifunktio välillä I, niin kaikki f:n integaalifunktiot välillä I ovat muotoa $F + C$, missä C on vakiofunktio.*

Todistus. Jokainen $F + C$ ($C \in \mathbb{R}$) on f:n integraalifunktio I:ssä, sillä $\forall x \in I$ pätee

$$D(F(x) + C) = DF(x) + DC = f(x) + 0 = f(x).$$

Kääntäen, olkoon $G : I \to \mathbb{R}$ f:n integraalifunktio. Koska

$$D(F(x) - G(x)) = DF(x) - DG(x) = f(x) - f(x) = 0\ \forall x \in I,$$

on integraalilaskennan peruslauseen nojalla olemassa vakiofunktio C s.e. $F(x) - G(x) = C$ koko välillä I. Tällöin $G(x) = F(x) - C = F(x) + (-C)$, joten G on F:n ja vakiofunktion summa. $\square$

Summan $f + g$ integraalifunktiot ovat f:n ja g:n integraalifunktioiden summat:

1.4 Lause. *Jos f:llä ja g:llä on välillä I integraalifunktiot ja $a \in \mathbb{R}$, niin*

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \text{ ja}$$
$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Todistus. Merkitään $F(x) = \int f(x)dx$ ja $G(x) = \int g(x)dx$. Tällöin

$$D(F(x) + G(x)) = DF(x) + DG(x) = f(x) + g(x) \ \forall x \in I$$

ja

$$D(aF(x)) = aDF(x) = af(x) \ \forall x \in I. \quad \square$$

Osoitamme myöhemmin määrätyn integraalin teoriassa, että jokaisella jatkuvalla funktiolla $f : I \to \mathbb{R}$ on integraalifunktio $F : I \to \mathbb{R}$. Myös eräillä epäjatkuvilla funktioilla, nimittäin epäjatkuvilla derivaatoilla, on integraalifunktiot. Kuitenkin jos epäjatkuvuuskohta on ns. hyppäysepäjatkuvuus, integraalifunktiota ei voi olla olemassa. Sivuutamme tämän todistamisen. Todistus nojaisi siihen, että välillä I derivoituvan funktion derivaatta saa kahden arvonsa väliset arvot ja tätä emme syksyn kurssissa todistaneet.

1.5 Esimerkki. (i) Funktio $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

on derivoituva ja derivaatta

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ (erotusosamäärän avulla)} \\ 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ (tulon derivaatta)} \end{cases}$$

ei ole jatkuva origossa. Tällä epäjatkuvalla funktiolla f on siis integraalifunktiona F koko $\mathbb{R}$:ssä.

(ii) Jos

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

eli funktiolla f on hyppäysepäjatkuvuus origossa, niin ainoa mahdollinen integraalifunktion muoto on

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & x > 0 \\ E, & x \leq 0, \end{cases}$$

(sillä $D(x + C) = 1$ ja $DE = 0$) eräillä vakioilla $C, E \in \mathbb{R}$. Koska F on jatkuva origossa, niin $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = C = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = E$, joten olisi oltava

$$F(x) = \begin{cases} x + C, & x > 0 \\ C, & x \leq 0. \end{cases}$$

Koska F ei ole derivoituva origossa (miksi?), f:llä ei ole integraalifunktiota.

1.6. Jokaiseen derivoimissääntöön liittyy käänteinen integroimissääntö. Näin saadaan mm. seuraavat derivoimalla todistettavat integroimiskaavat:

$$\int a\,dx = ax + C \qquad (a \text{ on vakiofunktio}) \tag{1}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}\,x^{r+1} + C \qquad (r \neq -1) \tag{2}$$

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C \tag{3}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \tag{4}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C \qquad (a > 0,\ a \neq 1) \tag{5}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{6}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{7}$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \tag{8}$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C \tag{9}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2 x)dx = \tan x + C \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot^2 x)dx = -\cot x + C \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \overline{\text{arc}}\sin x + C = -\,\overline{\text{arc}}\cos x + C' \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \overline{\text{arc}}\tan x + C = -\,\overline{\text{arc}}\cot x + C' \tag{13}$$

(Kaavoissa (12) ja (13) on $C' = C + \frac{\pi}{2}$, koska $\overline{\text{arc}}\sin x + \overline{\text{arc}}\cos x = \overline{\text{arc}}\tan x + \overline{\text{arc}}\cot x = \frac{\pi}{2}$.)

$$\int f'(x)\big(f(x)\big)^r dx = \frac{1}{r+1}\,(f(x))^{r+1} + C \qquad (r \neq -1) \tag{14}$$

$$\int f'(x)\big(f(x)\big)^{-1} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C \tag{15}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C. \tag{16}$$

Säännöissä (14)–(16) f on jokin välillä I derivoituva funktio ja säännössä (15) on lisäksi oletettava, että $f(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Koska f on derivoituvana funktiona myös jatkuva, seuraa ehdosta $f(x) \neq 0\ \forall x \in I$, että $f(x) > 0\ \forall x \in I$ tai $f(x) < 0\ \forall x \in I$.

1.7 Esimerkki.

(i)
$$\int e^{3x}dx = \int \frac{1}{3}\cdot 3e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int 3e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

(sääntö (16), $f(x) = 3x$, $f'(x) = 3$).

(ii)
$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx = \ln|x+\sin x| + C, \text{ kun } x+\sin x \neq 0$$

(sääntö (15), $f(x) = x+\sin x$). Erityisesti välillä $]0,\infty[$ on $x > |\sin x| \geq -\sin x$ (HT: perustele tämä), jolloin $x+\sin x > 0$ ja siis

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx = \ln|x+\sin x| + C = \ln(x+\sin x) + C, \ x \in\,]0,\infty[\,.$$

Välillä $]-\infty,0[$ saadaan vastaavasti $x+\sin x < 0$ ja siten

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,dx = \ln|x+\sin x| + C = \ln(-x-\sin x) + C, \ x \in\,]-\infty,0[\,.$$

Varmennetaan viimeinen kaava derivoimalla: Jos $x < 0$, on $-x-\sin x > 0$ ja siten

$$D\ln(-x-\sin x) = \frac{D(-x-\sin x)}{-x-\sin x} = \frac{-1-\cos x}{-x-\sin x} = \frac{1+\cos x}{x+\sin x},$$

kuten pitikin.

(iii)
$$\int (x+2)^2 dx = \frac{1}{3}(x+2)^3 + C$$

(kaava (14), $f(x) = x+2$, $r = 2$, $f'(x) = 1$).

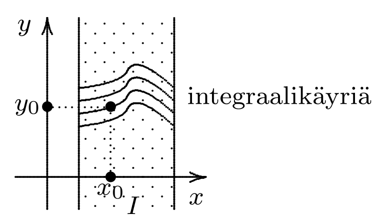
(iv)
$$\int \frac{\ln(2+\sin x)}{2+\sin x}\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\big(\ln(2+\sin x)\big)^2 + C$$

(kaava (14), $f(x) = \ln(2+\sin x)$, $r = 1$, $f'(x) = \frac{\cos x}{2+\sin x}$).

1.8 Integraalikäyrät.

Olkoon F funktion f integraalifunktio välillä I. Lauseen 1.3 nojalla f:n jokainen integraalifunktio I:ssä on muotoa $F(x) + C$ sopivalla integroimisvakiolla $C \in \mathbb{R}$. Jokainen funktio $y = y(x) = F(x) + C$ toteuttaa välillä I näin ollen yksinkertaista muotoa olevan *differentiaaliyhtälön*, (lyh. DY), $y' = f(x)$ ja tällaiset funktiot y ovat kaikki tämän DY:n ratkaisufunktiot välillä I. Ratkaisufunktion kuvaajaa $y = F(x) + C$ sanotaan DY:n $y' = f(x)$ *integraalikäyräksi*. Yhdessä ne peittävät $\mathbb{R}^2$:n "vyön" $I\times\mathbb{R}$ niin, että jokaisen $I\times\mathbb{R}$:n pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee tasan yhden f:n integraalifunktion $y = F(x)+C$ kuvaaja, nimittäin sen, jolle C ratkeaa alkuehdosta $y_0 = F(x_0) + C$, josta $C = y_0 - F(x_0)$.

Kuva tilanteesta
Eri integraalikäyrät saadaan y-akselin suuntaisilla siirroilla toisistaan; ne ovat yhteneviä. (Vyö $I\times\mathbb{R}$ on kuvan varjostettu osa).



1.9 Esimerkki. Määritä funktion $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ se integraalifunktio F, jolle $F(0) = 0$.

Ratkaisu. Koska $\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, f on jatkuva 1:ssä ja saman tien koko $\mathbb{R}$:ssä. Myöhemmän tuloksen nojalla f:llä on siis integraalifunktio F ja 1.8:n nojalla näistä tasan yksi toteuttaa annetun alkuehdon.

Arvoilla $x \leq 1$ on oltava $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ ja arvoilla $x > 1$ on oltava $F(x) = x + D$, joten jokainen kyseeseen tuleva integraalifunktio F on muotoa

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \leq 1 \\ x + D, & x > 1 \end{cases}, \quad \text{missä } C, D \in \mathbb{R}.$$

Koska F on derivoituva 1:ssä, niin se on jatkuva 1:ssä, joten

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = 1 + D = \lim_{x \to 1^-} F(x) = \frac{1}{2} + C \;\Rightarrow\; C = D + \frac{1}{2}.$$

On siis oltava

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + D + \frac{1}{2}, & x \leq 1 \\ x + D, & x > 1 \end{cases}, \quad (D \in \mathbb{R}).$$

Alkuehdosta $F(0) = 0$ seuraa $0 + D + \frac{1}{2} = 0$, joten $D = -\frac{1}{2}$. Siis funktio

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & x > 1 \end{cases}$$

on ainoa mahdollinen ratkaisu.

Jos jatkuvan funktion integraalifunktion olemassaoloa pitää tunnettuna olemme jo ratkaisseet tehtävän. Muuten on varmistettava vielä derivoimalla, että ainoa mahdollisuutemme on derivoituva myös pisteessä $x = 1$ ja $F'(1) = f(1)$. Näin on derivoituvuustestin nojalla, sillä F on jatkuva 1:ssä ja

$$F'(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

toteuttaa ehdon $\lim_{x \to 1^+} F'(x) = 1 = \lim_{x \to 1^-} F'(x)$. Väliarvolauseen seurauksena todistettu derivoituvuustesti kertoo siis, että on olemassa $F'(1) = 1 = f(1)$, jolloin F on f:n integraalifunktio. Se toteuttaa (muodostamistapansa perusteellakin) alkuehdon $F(0) = 0$.

1.10 Osittaisintegrointi.

Tulon derivoimissäännöstä

$$D\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

saadaan

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx$$

ja tästä edelleen ns. *osittaisintegrointisääntö*

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.}$$

Sitä voi yrittää soveltaa esittämällä integroitava funktio $h(x)$ sopivalla tavalla tulona $h(x) = f(x)g'(x)$.

1.11 Esimerkki.
(i) $\int xe^x dx$. Valitaan $f(x) = x$ ja $g'(x) = e^x$, jolloin $f'(x) = 1$ ja $g(x) = e^x$:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

(ii) $\int x \cos x \, dx$. Valitaan $f(x) = x$ ja $g'(x) = \cos x$, jolloin $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \sin x$:

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

(iii) $\int \ln x \, dx$. Valitaan $f(x) = \ln x$ ja $g'(x) = 1$, jolloin $f'(x) = \frac{1}{x}$ ja $g(x) = x$:

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - x + C.$$

(iv) $\int \overline{\mathrm{arc}} \tan x \, dx$. Valitaan $f(x) = \overline{\mathrm{arc}} \tan x$ ja $g'(x) = 1$, jolloin $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ja $g(x) = x$:

$$\begin{aligned}\int \overline{\mathrm{arc}} \tan x \, dx &= x \, \overline{\mathrm{arc}} \tan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \, \overline{\mathrm{arc}} \tan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= x \, \overline{\mathrm{arc}} \tan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

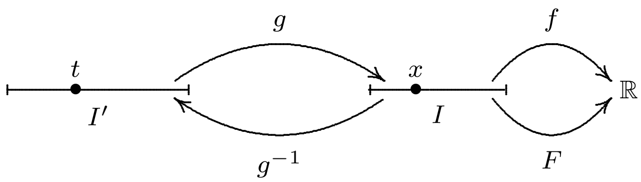
(v) Merkitään $I = \int e^x \sin x \, dx$. Kahdella osittaisintegroinnilla saadaan yhtälö, josta I ratkeaa:

$$\begin{aligned}I &= \int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \\ &\Rightarrow \ 2I = e^x (\sin x - \cos x) \ \Rightarrow \ I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)\end{aligned}$$

Siis

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

1.12 Sijoituskeino eli muuttujan vaihto.
Johdatteleva kuva



Olkoon F funktion f integraalifunktio välillä I ja olkoon $g : I' \to I$ välin I' jatkuvasti derivoituva bijektio välille I. Tällöin $F \circ g : I' \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t) \ \forall t \in I'.$$

Siten välillä I' pätee

$$(F \circ g)(t) = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Jos tämä integraali osataan laskea, osataan laskea myös $F(x) = \int f(x)dx$, sillä

$$F(x) = (F \circ \mathrm{id_I})(x) = (F \circ (g \circ g^{-1}))(x) = (F \circ g)(g^{-1}(x)) \ \forall x \in I$$

ts. $F(x)$ saadaan $F(g(t))$:stä sijoituksella $t = g^{-1}(x)$, kunhan g^{-1}:n lauseke osataan muodostaa.

Yleisohje. Kun integraaliin $\int f(x)dx$ halutaan tehdä sijoitus $x = g(t)$ täytyy $f(x)$ korvata lausekkeella $f(g(t))$ ja dx lausekkeella $g'(t)dt$. Integraalin $\int f(g(t))g'(t)dt$ laskemisen jälkeen palataan sijoituksella $t = g^{-1}(x)$ takaisin muuttujaan x, jolloin tuloksena on $F(x) = \int f(x)dx$.

Huomautus. (1) Kun sijoitus toimitetaan määrättyyn integraaliin, ei muuttujaan x paluu ole välttämätöntä, vaan x-rajat muutetaan t-rajoiksi. Tämän seurauksena g:n bijektiivisyyskään ei ole tarpeen, vaan riittää, että g on jatkuvasti derivoituva surjektio.
(2) Sijoituskeinoa käytettäessä joutuu usein kokeilemaan erilaisia sijoitusyritteitä, ennen kuin toimiva ehkä löytyy.

1.13 Esimerkki.

(i)
$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx$$

Sijoitetaan $\begin{cases} x^3 = t \\ x = \sqrt[3]{t} \end{cases}$, jolloin $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2$ eli $dt = 3x^2dx$:

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{arc}}\tan t + C$$
$$= \frac{1}{3}\,\overline{\mathrm{arc}}\tan x^3 + C.$$

(ii)
$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx.$$

Tämän saa lasketuksi kaavalla (1.6.(14)) ($f(x) = \tan x$) tai sijoituksella $\tan x = t$ eli $x = \overline{\text{arc}}\tan t$ ja $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$, joka antaa

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2 x + C.$$

Seuraavat kaksi esimerkkiä näyttävät, miten integroidaan osamäärät

$$(*) \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}; \quad P(x) = ax + b,\ Q(x) = cx^2 + dx + e,\ (c \neq 0),$$

kun nimittäjäpolynomilla Q ei ole nollakohtia, ts. kun $d^2 - 4e < 0$.

1.14 Esimerkki.

(i)
$$\int \frac{dx}{1+x+x^2} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\frac{3}{4}(1+\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2)} =$$
$$= \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})\right)^2} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \qquad \left(\text{Sij. } \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}} = t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{cases}\right)$$
$$= \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{1+t^2} \underset{1.6.(13)}{=} \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\overline{\text{arc}}\tan t + C = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\overline{\text{arc}}\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(ii)
$$\int \frac{x}{1+x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x+x^2} =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+x+x^2) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\overline{\text{arc}}\tan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

kohdan (i) ja kaavan 1.6.(15) nojalla.

Kaavan $(*)$ mukainen yleinen f integroidaan samaan tapaan kuin esimerkin 1.14 erikoistapaukset.

1.15 Rationaalifunktioiden integrointi. Rationaalifunktio $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ voidaan periaatteessa aina integroida alkeisfunktioiden avulla ns. *osamurtoihin jaon* jälkeen. Selitämme tämän menetelmän tärkeimmät erikoistapaukset ilman yleistä todistusta.

VAIHE 1: Jos P:n aste $\deg P$ on suurempi kuin Q:n aste $\deg Q$, eli $\deg P > \deg Q$, suoritetaan polynomien jakolasku ja saadaan tulos

$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

missä P_1 ja P_2 ovat polynomeja ja $\deg P_2 < \deg Q$. Lausekkeen $P_2(x)/Q(x)$ integroinnissa edetään sen jälkeen samoin kuin tapauksessa $\deg P < \deg Q$ alla.

TAPAUS $\deg P < \deg Q$
Ratkaistaan yhtälö $Q(x) = 0$. Tämä on yleensä käytännössä mahdotonta, mutta voidaan osoittaa, että n:nnen asteen reaalikertoimisella polynomilla

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

on tekijöihin jako

$$Q(x) = a_n(x - x_1)\cdots(x - x_n) \quad (a_n \neq 0),$$

missä $x_1, \ldots, x_n$ ovat Q:n kompleksiset nollakohdat $x_j = \alpha_j + \beta_j i$ ($j = 1, \ldots, n$; i on imaginaariyksikkö, ts. $i^2 = -1$; $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$). Jos jokin juurista $x_j = \alpha_j + \beta_j i$ ei ole reaalinen ($\beta_j \neq 0$), niin myös sen liittoluku $\bar{x}_j = \alpha_j - \beta_j i$ on reaalikertoimisen polynomin Q nollakohta ja tulo

$$\begin{aligned}
(x - x_j)(x - \bar{x}_j) &= (x - \alpha_j - \beta_j i)(x - \alpha_j + \beta_j i) \\
&= (x - \alpha_j)^2 + (x - \alpha_j)\beta_j i - (x - \alpha_j)\beta_j i - (\beta_j i)^2 \\
&= x^2 - 2\alpha_j x + \alpha_j^2 + \beta_j^2
\end{aligned}$$

on reaalinen jaoton 2. asteen polynomi (sillä $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ja $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \in \mathbb{R}$). Näin ollen Q jakaantuu tekijöihin, jotka ovat joko muotoa $x - x_j$ (missä $x_j = \alpha_j \in \mathbb{R}$ on Q:n nollakohta) tai reaalisia jaottomia 2. asteen polynomeja $x^2 - ax + b$ (missä $a^2 - 4b < 0$). Näiden joukossa voi kyllä olla useampikertaisiakin, ts. sama tekijä voi esiintyä esimerkiksi k kertaa, jolloin se voidaan kirjoittaa muotoon $(x - x_0)^k$ (missä $x_0 \in \mathbb{R}$; $Q(x_0) = 0$, $k < n$) tai $(x^2 + ax + b)^k$ (missä $a^2 - 4b < 0$, $k \leq \frac{n}{2}$).

Voimme olettaa Q:n näin tekijöihin jaetuksi, vaikka yleisen n. asteen yhtälön ratkaisukaavaa ei olekaan olemassa kun $n \geq 5$ (syvällinen tulos). Lisäksi voimme olettaa, ettei P:llä ja Q:lla ole yhteisiä tekijöitä.

TAPAUS 1. $Q(x) = a(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, missä nollakohdat x_j ovat reaaliset ja keskenään erisuuret.

Tällöin on olemassa vakiot $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a(x - x_1)\cdots(x - x_n)} = \underbrace{\frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}}_{f\text{:n } \underline{\text{osamurrot}}} \quad (\deg P < \deg Q)$$

TAPAUS 2. Q:lla on vain reaalisia nollakohtia, joiden joukossa on myös useampikertaisia.

Nyt osamurtokehitelmään on otettava *kutakin nollakohtaa kohti* täsmälleen kertaluvun ilmaisema määrä termejä seuraavaan tapaan:

Jos x_0 on Q:n k-kertainen nollakohta (ts. $Q(x) = R(x)(x-x_0)^k$, R on polynomi, jolle $R(x_0) \neq 0$), niin f:n osamurtokehitelmään tulevat mukaan termit

$$\frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$

(Oikeastaan tapaus 1 tulee tässä uudelleen valinnalla $k = 1$.)

TAPAUS 3. Q:lla on jaoton tekijä $x^2 + bx + c$, missä $b^2 - 4c < 0$ (tai $ax^2 + bx + c$, missä $b^2 - 4ac < 0$, jos x^2:n kerrointa ei ole normitettu 1:ksi).

Jos tällainen tekijä on yksinkertainen, niin osamurtohajotelmaan otetaan termi

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c} \qquad \left(\text{tai } \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\right)$$

Tämän integrointi on opetettu edellä kohdassa 1.14.

Jos tekijä on k-kertainen (eli jos $Q(x) = (ax^2+bx+c)^k R(x)$, missä R on polynomi, joka ei ole jaollinen tekijällä ax^2+bx+c), niin osamurtokehitelmään otetaan termit

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

Näiden integrointi sujuu neliöksi täydentämällä ja käyttämällä toistuvasti palautuskaavaa

$$(1.16) \qquad \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} + \left(1 - \frac{1}{2(n-1)}\right)\int \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}},$$

jonka voi todistaa osittaisintegroinnilla.

1.17 Esimerkki.

(i)
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1},$$

jonka saisi myös jakokulman avulla. Siis

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.}}$$

Tässä oli suoritettava jakolasku, koska osoittajan aste > nimittäjän aste (vaihe 1 yllä).

(ii)
$$f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

Laventamalla ensimmäinen termi tekijällä $(x-1)(x+1)$ toinen tekijällä $x(x+1)$ ja kolmas tekijällä $x(x-1)$ ja laskemalla tämän jälkeen termien summa saadaan

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x(x-1)(x+1)} \equiv \frac{(A+B+C)x^2+(B-C)x-A}{x(x-1)(x+1)} \\
&\Leftrightarrow \\
&(A+B+C)x^2+(B-C)x-A \equiv 1 \;\Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ B-C=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\begin{aligned}
&\int f(x)dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx \\
&= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x| + C.}}
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} \equiv \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} \\
&\Leftrightarrow \\
&A(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)^2 \equiv x^2 \\
&\Leftrightarrow \\
&(B+C)x^2 + (A-2C)x + A - B + C \equiv x^2 \\
&\Leftrightarrow \\
&\begin{cases} B+C=1 \\ A-2C=0 \\ A-B+C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{3}{4} \\ C=\frac{1}{4}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Siten

$$
\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C.}}
\end{aligned}
$$

(iv)

$$f(x) = \frac{3x^2+2x+5}{x^3+x^2+x+1}$$

Tässä nimittäjälle keksitään nollakohta $x=-1$, joten nimittäjä on jaollinen $x+1$:llä. Jakokulmalla saadaan, että $x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$. Tämä nähdään myös suoraan: $x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + x + 1 = (x+1)(x^2+1)$. Siten f:n osamurtohajoitelma on muotoa

$$\frac{3x^2+2x+5}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Laventamalla oikean puolen ensimmäinen termi x^2+1:llä ja toinen termi $x+1$:llä ja laskemalla termit yhteen saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+A+C}{(x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{3x^2+2x+5}{(x+1)(x^2+1)} \\
&\Leftrightarrow \\
&(A+B)x^2+(B+C)x+A+C \equiv 3x^2+2x+5 \\
&\Leftrightarrow \\
&\begin{cases} A+B=3 \\ B+C=2 \\ A+C=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=0 \\ C=2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Siten

$$\int f(x)dx = \int \frac{3}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x^2+1}\,dx = \underline{\underline{3\ln|x+1| + 2\,\overline{\text{arc}}\tan x + C}}.$$

(v)

$$\begin{aligned}
&f(x) = \frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3} \equiv \frac{Ax+B}{(x^2+1)^3} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1} \\
&\Leftrightarrow \\
&\frac{Ax+B+(Cx+D)(x^2+1)+(Ex+F)(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} \equiv \frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3} \\
&\Leftrightarrow \\
&Ex^5+Fx^4+(C+2E)x^3+(D+2F)x^2+(A+C+E)x+B+D+F \\
&\qquad \equiv x^4+2x^2+x+1 \\
&\Leftrightarrow \\
&\begin{cases} E=0 \\ F=1 \\ C+2E=0 \\ D+2F=2 \\ A+C+E=1 \\ B+D+F=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=C=D=E=0 \\ F=1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Siten

$$\int \frac{x^4+2x^2+x+1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \underline{\underline{-\frac{1}{4(x^2+1)^2} + \overline{\mathrm{arc}}\tan x + C}}$$

integroimiskaavojen 1.6.(14) ($r = -3$) ja 1.6.(13) nojalla. Tässä ei siis tarvittu palautuskaavaa (1.16), jota tällaisissa integraaleissa yleensä tarvitaan.

1.18 Palauttaminen rationaalifunktioon.

Eräät integraalit voidaan sopivilla sijoituksilla palauttaa rationaalifunktion integraaleiksi.

Olkoon $R(x,y)$ x:n ja y:n rationaalinen lauseke, ts. x:stä ja y:stä yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuilla muodostettu lauseke, jolloin $R(x,y)$ saadaan muotoon

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \qquad (P \text{ ja } Q \text{ ovat } x\text{:n ja } y\text{:n polynomeja.})$$

(1.19) Tyyppi $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad (ad-bc \neq 0,\ n \in \mathbb{N}).$

Sijoitus $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ palauttaa tämän rationaalifunktion integraaliksi, sillä tällöin

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \;\Rightarrow\; t^n(cx+d) = ax+b \;\Rightarrow\; (ct^n-a)x = b-dt^n \;\Rightarrow\; x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} = f(t)$$

ja tästä $dx = f'(t)dt$, missä f' on t:n rationaalifunktio.

(1.20) Tyyppi $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx \qquad (a > 0 \text{ vakio}).$

Merkintä $y = \sqrt{a^2-x^2}$ (”ympyräsijoitus”) antaa $y^2 = a^2 - x^2$. Sijoituksella

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= (a-x)(a+x) \\ y &= t(x+a) = \frac{a-x}{t} \end{aligned}\right\} \underset{\text{ratkaise ensin } x}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{aligned} x &= a\frac{1-t^2}{1+t^2} = x(t) \\ y &= \frac{2at}{1+t^2} = y(t) \end{aligned}\right.$$

Saadaan $dx = x'(t)dt$, jossa $x'(t)$ on t:n rationaalifunktio kuten myös $x(t)$ ja $y(t)$.

Toinen tapa: Sijoitus $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$, $\sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$ ($t = \overline{\mathrm{arc}}\sin\frac{x}{a} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, jolloin $+\sqrt{\ }$) tuottaa sinin ja kosinin rationaalilausekkeen, jonka kohta opimme palauttamaan rationaalifunktion integraaliksi.

(1.21) $$\text{Tyyppi} \int R\left(x, \sqrt{x^2+a}\right) dx \qquad (a \neq 0 \text{ vakio}).$$

Merkintä $y = \sqrt{x^2+a}$ ("hyperbelisijoitus") antaa $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x) = a$. Sijoituksella

$$\begin{cases} y + x = t \\ y - x = \dfrac{a}{t} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{a}{t}\right) = x(t) \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{a}{t}\right) = y(t) \end{cases}$$

saadaan $dx = x'(t)dt$, missä $x'(t)$ on t:n rationaalifunktio kuten myös $x(t)$ ja $y(t)$.

(1.22) $$\text{Tyyppi} \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \qquad (a \neq 0,\ b^2 - 4ac \neq 0).$$

palautuu neliöksi täydentämällä joko tyypiksi (1.20) ($a < 0$) tai tyypiksi (1.21) ($a > 0$).

(1.23) $$\text{Tyyppi} \int f(e^x)dx \quad (f \text{ rationaalifunktio}).$$

Sijoitus $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$ tuottaa rationaalifunktion integraalin.

1.24 Esimerkki. i) $\int x\sqrt[3]{2x-3}dx$. Sovelletaan (1.19) valinnoilla $R(x,y) = xy$, $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$ ja $n = 3$:

Sijoitus $t = \sqrt[3]{2x-3}$ antaa $t^3 = 2x-3$, $x = \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}$, $dx = \frac{3}{2}t^2dt$ ja

$$\int x\sqrt[3]{2x-3}dx = \int \left(\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}\right) t \cdot \frac{3}{2}t^2 dt = \int \left(\frac{3}{4}t^6 + \frac{9}{4}t^3\right) dt =$$
$$= \frac{3}{28}t^7 + \frac{9}{16}t^4 + C = \underline{\underline{\frac{3}{28}(2x-3)^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{16}(2x-3)^{\frac{4}{3}} + C}}.$$

ii) $\int \sqrt{1-x^2}dx$. Sovelletaan (1.20) valinnoilla $R(x,y) = y$, $a = 1$. Sijoitus

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = x(t), \quad y = \frac{2t}{1+t^2} = y(t),$$

joka antaa

$$dx = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)\cdot 2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt,$$

johtaa kuitenkin mutkikkaaseen lausekkeeseen

$$\int \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{y}\,dx = \int y(t)\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = \int \frac{-8t^2}{(1+t^2)^3}dt.$$

Käytetään sen vuoksi mieluummin sijoitusta $x = \sin t$, $t = \overline{\text{arc}}\sin x$, $dx = \cos t\,dt$, jolloin saadaan helpompi lasku:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

Tämän laskeminen on harjoitustehtävä. Lopuksi on vielä palattava muuttujaan x ja tällöin tarvitaan kaavaa:

$$\cos\overline{\text{arc}}\sin x = +\sqrt{1-\sin^2(\overline{\text{arc}}\sin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Lopputulokseksi saadaan, että

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}\overline{\text{arc}}\sin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.}}$$

iii) $\int \sqrt{x^2+1}dx$. Sovelletaan (1.21) sijoituksin $R(x,y) = y$, $a = 1$. Sijoitus

$$x = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t}),\quad y = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})\quad \text{antaa}\quad dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)dt\quad \text{ja}$$

$$\int \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{y}\,dx = \int \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\int \left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}\underbrace{(t+\frac{1}{t})}_{2y(t)}\underbrace{(t-\frac{1}{t})}_{2x(t)} + 2\ln|t|\Big) + C =$$

(1.21):ssä oli $t = y + x$ ja nyt $y = \sqrt{x^2+1}$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x^2+1}\cdot 2x + 2\ln|\sqrt{x^2+1}+x|\right) + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) + C.}}$$

iv) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x+e^{2x}}dx$. Sijoitus $t = e^x$, $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t}dt$ antaa

$$\int \frac{e^x}{1+e^x+e^{2x}}dx = \int \frac{t}{1+t+t^2}\cdot\frac{1}{t}dt = \int \frac{dt}{1+t+t^2} \overset{1.14(\text{i})}{=}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\text{arc}}\tan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}}\overline{\text{arc}}\tan\frac{2e^x+1}{\sqrt{3}} + C.}}$$

1.25 Trigonometristen funktioiden integrointi.
Jos $R(\sin x, \cos x)$ on $\sin x$:n ja $\cos x$:n rationaalinen lauseke, niin integraali

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

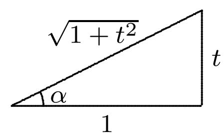
palautuu sijoituksella

$$\tan\frac{x}{2} = t, \quad x = 2\,\overline{\mathrm{arc}}\tan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt \tag{1.26}$$

rationaalifunktion integraaliksi. Tällöin on näet voimassa kaavat

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{ja} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

kuten kolmion



$\begin{pmatrix} \alpha = \frac{x}{2} \\ \tan\alpha = t \end{pmatrix}$

ja kaavojen $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ avulla helposti todetaan.

1.27 Esimerkki. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$. Sijoitus $\tan\frac{x}{2} = t$ antaa nyt

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \underline{\underline{\ln|\tan\frac{x}{2}| + C}}.$$

Muotoa $\int \sin^n x\,dx$ ja $\int \cos^n x\,dx$ $(n \in \mathbb{Z})$ olevia integraaleja voi laskea monin tavoin:
a) Sijoitetaan $\tan\frac{x}{2} = t$ (jos n on parillinen, sijoitus $\tan x = t$ on parempi)

b)
$$\int \sin^{2m+1} dx = \int \sin^{2m} x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^m \sin x\,dx =$$

Sijoitus $\cos x = t$, $dt = -\sin x dx$

$$= -\int (1-t^2)^m dt,$$

joka on polynomin integraali.
c) Osittaisintegroinnilla voidaan johtaa palautuskaavat (joissa $n \geq 2$):

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

d) Trigonometristen kaavojen käyttö.

Esimerkiksi $\int \cos^2 x\,dx$ ja $\int \sin^2 x\,dx$ voidaan helposti laskea kaavojen

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \text{ja} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

avulla (harjoitustehtävä). Edelleen esimerkiksi

$$\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

lasketaan samojen kaavojen avulla ...

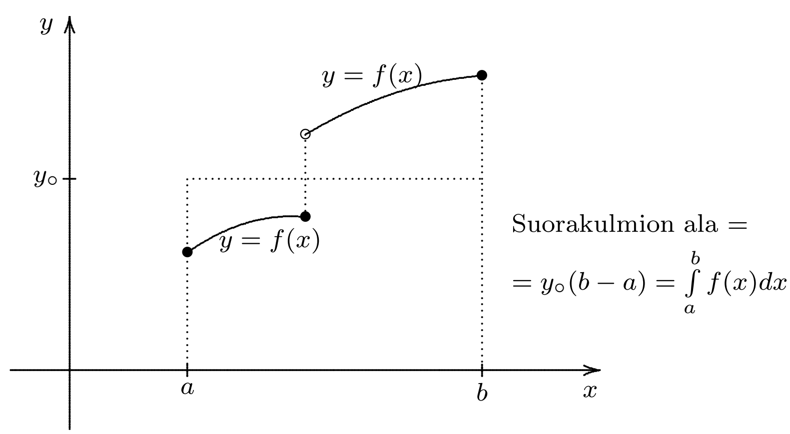
Integraalit $\int \sin px \sin qx\,dx$, $\int \cos px \cos qx\,dx$ ja $\int \sin px \cos qx\,dx$ lasketaan käyttämällä kaavoja

$$\begin{cases} \sin px \sin qx = \frac{1}{2}[\cos(p-q)x - \cos(p+q)x] \\ \cos px \cos qx = \frac{1}{2}[\cos(p+q)x + \cos(p-q)x] \\ \sin px \cos qx = \frac{1}{2}[\sin(p+q)x + \sin(p-q)x] \end{cases} \tag{1.28}$$

Trigonometrisissä integraaleissa kannattaa yleensä hetki miettiä mahdollisuuksia kaavakokoelmista (MAOL) löytyvien kaavojen käyttöön esimerkiksi ennen sijoitusta $\tan \frac{x}{2} = t$.

Määrätty integraali

Idea: määrätty integraali $\int_a^b f(x)dx$ on f:n "keskiarvo" välillä $[a, b]$ kerrottuna välin pituudella $b - a$.



Kuvassa $y_0 = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ on "f:n keskimääräinen arvo" $[a, b]$:ssä. Kuvan tilanteessa se ei ole f:n mikään arvo!

1.29 Määritelmä. Olkoon $a < b$ ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *rajoitettu* funktio. Välin $[a,b]$ *jako* $D = (x_0, \ldots, x_n)$ on aidosti kasvava jono $[a,b]$:n pisteitä siten, että $x_0 = a$ ja $x_n = b$:

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Jako D' on jaon D *alijako*, jos D:n jakopisteet x_i ovat jakopisteitä myös D':ssa.

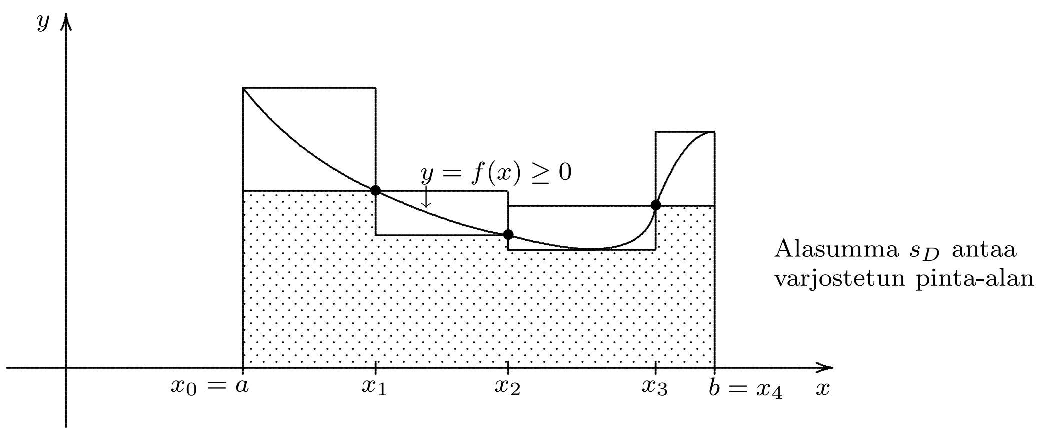
Jakoon $D : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ liittyy kolmenlaisia summia:

Yläsumma $S_D = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, missä $M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$,

alasumma $s_D = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, missä $m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$ ja

Riemannin summat $R_D = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, missä $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $(i = 1, \ldots, n)$.

1.30 Huomautus. (1) Aina $s_D \le R_D \le S_D$ ja jos f on positiivinen (ts. $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in [a,b]$), niin S_D on ”ulkomonikulmion” ja s_D ”sisämonikulmion” ala kuten alla olevassa kuvassa.



(2) Jos D' on D:n alijako, niin

$$s_{D'} \ge s_D \quad \text{ja} \quad S_{D'} \le S_D \quad \text{(todista!)}$$

(3) Jos D_1 ja D_2 ovat kaksi jakoa, niin ehdosta (2) seuraa D_1:n ja D_2:n yhteiseen alijakoon D siirtymällä, että

$$s_{D_1} \le s_D \le S_D \le S_{D_2},$$

ts. jokainen alasumma on $\le$ mikä hyvänsä yläsumma. Siten ovat olemassa

$\underline{I} = \sup\limits_D s_D \in \mathbb{R}$, f:n *alaintegraali* ja $\overline{I} = \inf\limits_D S_D \in \mathbb{R}$, f:n *yläintegraali* ja $\underline{I} \le \overline{I}$.

(4) Jaolle $D = (x_0, x_1) = (a,b)$ $(n = 1)$ pätee

$$s_D = m(b-a) \le R_D = f(\xi)(b-a) \le S_D = M(b-a),$$

missä $m = \inf f([a,b])$, $M = \sup f([a,b])$ ja $\xi \in [a,b]$ on mielivaltainen.

1.31 Määritelmä. Jos rajoitetun funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alaintegraali ja yläintegraali yhtyvät, $\underline{I} = \overline{I} = I$, niin lukua $I = \int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$ sanotaan f:n *määrätyksi integraaliksi yli välin* $[a, b]$. Lisäksi sanotaan, että f on integroituva välillä (tai yli välin) $[a, b]$ ja sovitaan merkinnöistä

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx.$$

1.32 Lause. *Olkoot f ja g integroituvia yli välin $[a, b]$ ja olkoon $M = \sup f\big([a, b]\big)$, $m = \inf f\big([a, b]\big)$ ja D välin $[a, b]$ jako sekä $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tällöin*

(a) $s_D \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq S_D$.

(b) $m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ *ja vakiofunktion* $f(x) \equiv c$ *integraali*

$$\int\limits_a^b cdx = c(b-a).$$

(c) $\alpha f + \beta g$ *on integroituva yli välin* $[a, b]$ *ja*

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx.$$

(d) *Jos* $f(x) \geq g(x)$ *kaikilla* $x \in [a, b]$, *niin*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Erityisesti, jos $g(x) \equiv 0$ *eli* $g(x) = 0$ *kaikilla* $x \in [a, b]$, *niin*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(Viime mainittu seuraa myös heti 1.32 (b)*:stä, jossa* $m \geq 0$.*)*

(e) *Jos* $a \leq c \leq b$, *niin*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Itse asiassa tämä kaava pätee riippumatta a:n, b:n ja c:n järjestyksestä, kunhan f on integroituva yli laajimman kaavaan liittyvän välin.

(f) *Määritellään jaon* $D = (x_0, \ldots, x_n)$ *normi* $|D| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$ *(jolloin* $|D| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *"jako D tihenee rajatta"). Tällöin Riemannin summille* $R_D = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ *pätee* $\lim\limits_{|D| \to 0} R_D = \int\limits_a^b f(x)dx$*, ts.* $\forall\, \epsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ *siten, että* $|\int\limits_a^b f(x)dx - R_D| < \epsilon$ *aina kun* $|D| < \delta$ *ja* R_D *on jakoon D liittyvä Riemannin summa.*

Todistus. Väitteet (a), (b), (d) ja (e) ovat melko suoria seurauksia määritelmistä. Väitteen (f) todistus saadaan seuraavassa lauseessa esitettävää integroimistestiä käyttäen siitä, että jokaisella jaolla D pätee arvio $s_D \le R_D \le S_D$. Todistuksen yksityiskohdat jätetään lukijan pohdittaviksi. Väite (c) saadaan (f):n avulla. □

1.33 Lause (Integroituvuustesti). *Rajoitettu funktio* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *on integroituva, jos ja vain jos jokaista* $\epsilon > 0$ *vastaa* $[a, b]$*:n jako D niin, että* $S_D - s_D < \epsilon$*.*

Todistus. Jos f on integroituva, niin $\int\limits_a^b f(x)dx = I$ toteuttaa ehdon

$$I = \underline{I} = \sup_D s_D = \inf_D S_D = \overline{I}$$

sup:n ja inf:n ϵ-kriteereistä seuraa, että on olemassa jaot D_i, $i = 1, 2$ siten, että $0 \le I - s_{D_1} < \frac{\epsilon}{2}$ ja $0 \le S_{D_2} - I < \frac{\epsilon}{2}$. Tällöin kohdasta 1.30 (3) seuraa, että on olemassa jako D, jolle

$$s_{D_1} \le s_D \le \underline{I} = I = \overline{I} \le S_D \le S_{D_2}.$$

Nyt

$$S_D - s_D \le S_{D_2} - s_{D_1} = (S_{D_2} - I) + (I - s_{D_1}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

joten D on vaadittu.

Käänteisen puolen todistus (joka on helpompi) jätetään lukijoille. □

Seuraava esimerkki osoittaa, ettei hyppäysepäjatkuvuus estä määrätyn integraalin olemassaoloa, vaikka se esti (ks. 1.15 (ii)) integraalifunktion olemassaolon!

1.34 Esimerkki. Funktio $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ on integroituva yli välin $[-1, 1]$.

Perustelu. Olkoon $0 < \epsilon < 1$. Tarkastellaan jakoa $D = (-1, -\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4}, 1)$.
Kun $x \in [-1, -\frac{\epsilon}{4}]$, niin $f(x) = 0$, joten

$$m_1 = \inf f([-1, -\epsilon/4]) = 0 = M_1 = \sup f([-1, -\epsilon/4]).$$

Kun $x \in [-\frac{\epsilon}{4}, \frac{\epsilon}{4}]$, niin $f(x) = 0$, jos $-\frac{\epsilon}{4} \le x \le 0$ ja $f(x) = 1$, jos $0 < x \le \frac{\epsilon}{4}$, joten

$$m_2 = \inf f([-\epsilon/4, \epsilon/4]) = 0 \qquad \text{ja} \qquad M_2 = \sup f([-\epsilon/4, \epsilon/4]) = 1.$$

Kun $x \in [\frac{\epsilon}{4}, 1]$, niin $f(x) = 1$, joten

$$m_3 = \inf f([\epsilon/4, 1]) = 1 = M_3 = \sup f([\epsilon/4, 1]).$$

Siten

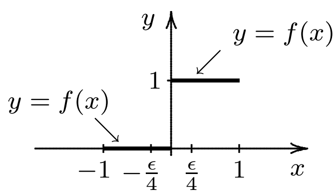
$$s_D = m_1\left(-\frac{\epsilon}{4} - (-1)\right) + m_2\left(\frac{\epsilon}{4} - (-\frac{\epsilon}{4})\right) + m_3\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) = 1 - \frac{\epsilon}{4} \quad \text{ja}$$
$$S_D = M_1\left(-\frac{\epsilon}{4} - (-1)\right) + M_2\left(\frac{\epsilon}{4} - (-\frac{\epsilon}{4})\right) + M_3\left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) = 1 + \frac{\epsilon}{4}$$

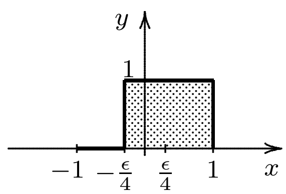
Näin ollen

$$S_D - s_D = 1 + \frac{\epsilon}{4} - \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

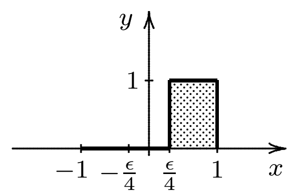
joten integroituvuustestin nojalla $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ on olemassa.

Oheisessa kuvassa jakoon D liittyvä "ulkomonikulmio" (ala S_D) ja "sisämonikulmio" (ala s_D).





ulkomonikulmio
ala $= S_D = 1 + \frac{\epsilon}{4}$



sisämonikulmio
ala $= s_D = 1 - \frac{\epsilon}{4}$

Huomautus. Koska $s_D \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_D$ ja $I = \underline{I} = \overline{I}$, niin

$$1 - \frac{\epsilon}{4} \le I \le 1 + \frac{\epsilon}{4} \;\Rightarrow\; -\frac{\epsilon}{4} \le I - 1 \le \frac{\epsilon}{4} \;\Rightarrow\; |I - 1| \le \frac{\epsilon}{4} < \epsilon$$

Viimeksi saatu ehto on voimassa mielivaltaisella $\epsilon > 0$ eli siis kaikilla $\epsilon > 0$, joten $|I - 1| = 0$ eli $I = 1$.

Välillä $[a, b]$ jatkuva funktio on integroituva:

1.35 Lause. *Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin f on rajoitettu ja integroituva.*

Todistus. Suljetulla välillä jatkuvana funktiona f saa suurimman ja pienimmän arvon M ja m ja $f([a, b]) = [m, M]$. Siten f on rajoitettu.

Integroituvuuden todistukseen tarvittaisiin ns. *tasaisen jatkuvuuden* käsite, joka joudutaan sivuuttamaan. (Idea luennolla). □

1.36 Lause (Integraalilaskennan väliarvolause). *Jos* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin on olemassa* $\xi \in [a,b]$ *siten, että* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.

[Tällöin $f(\xi)$ on f:n "keskimääräinen arvo" välillä $[a,b]$].

Todistus. Kuten 1.35:n todistuksessa äsken

$$(*) \qquad f([a,b]) = [m, M],$$

Joten 1.32 (b):n nojalla

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \;\Rightarrow\; m \le \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

Tällöin $(*)$:n nojalla on olemassa $\xi \in [a,b]$ siten, että

$$f(\xi) = \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a},$$

mistä väite seuraa. $\square$

1.37 Huomautus. Pienellä lisätarkastelulla havaitaan, että voi halutessaan valita $a < \xi < b$. Emme tarvitse tätä jatkossa.

1.38 Lause (Integraalilaskennan päälause). *Olkoon* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jatkuva funktio. Tällöin funktio* $I : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

on f*:n integraalifunktio, ts.* I *on derivoituva ja* $I'(x) = f(x)$ *kaikilla* $x \in [a,b]$ *(päätepisteissä derivaatta on toispuolinen).*

Todistus. Olkoot $x, x+h \in [a,b]$ $(h \neq 0)$. Tällöin

$$I(x+h)-I(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \overset{1.34\,(e)}{=} \int_x^{x+h} f(t)dt \overset{1.36}{=} f(\xi(h))((x+h)-x) = f(\xi(h))h$$

eräällä $\xi(h)$ x:n ja $x+h$:n välissä. Siten

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = f(\xi(h)) \to f(x), \quad \text{kun } h \to 0,$$

sillä $\xi(h) \to x$, kun $h \to 0$ ja f on jatkuva pisteessä x. Siis on olemassa $I'(x) = f(x)$. $\square$

Saamme nyt lasketuksi määrätyt integraalit integraalifunktioiden avulla:

1.39 Lause. *Olkoon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integraalifunktio. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \overset{\text{merk.}}{=} \Big/_a^b F(x)$$

Todistus. Koska F ja $I(x) = \int_a^b f(t)dt$ ovat molemmat f:n integraalifunktioita, ne eroavat toisistaan vakiolla lauseen 1.3 nojalla. Siis on olemassa $C \in \mathbb{R}$ s.e. $I(x) = F(x) + C$ kaikilla $x \in [a,b]$. Sijoitetaan tähän $x = a$, jolloin saadaan

$$0 = I(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C \;\Rightarrow\; C = -F(a) \text{ ja } I(x) = F(x) - F(a).$$

Sijoitetaan $x = b$, jolloin seuraa

$$I(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad \square$$

1.40 Esimerkki.

(i) $$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} \overset{\text{osamurrot}}{=} \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big/_2^3 (\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}}}.$$

(ii) $$\int_0^{-\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1}dx = -\int_{-\ln 2}^0 \frac{e^x}{e^x+1}dx \overset{1.6(15)}{=} -\Big/_{-\ln 2}^0 \ln(e^x+1) =$$

$$= -\ln(e^0+1) + \ln(e^{-\ln 2}+1) = -\ln 2 + \ln(\frac{1}{2}+1) =$$

$$= -\ln 2 + \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} = \ln(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}) = \underline{\underline{\ln\frac{3}{4}}}$$

Osittaisintegrointikaava saa määrätylle integraalille muodon

(1.41) $$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Esimerkki.

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \Big/_0^\pi x(-\cos x) - \int_0^\pi (-\cos x)dx = \pi + \Big/_0^\pi \sin x = \underline{\underline{\pi}}.$$

Sijoituskeino

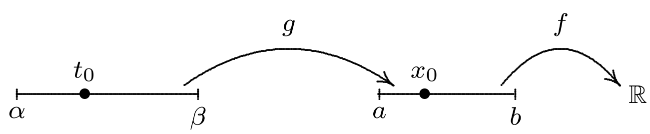
Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja olkoon $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ jatkuvasti derivoituva kuvaus, jolle $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin g on surjektio ja sen avulla välillä $[a,b]$ sijaitseva muuttuja x voidaan integraalissa $\int_a^b f(x)dx$ korvata välillä $[\alpha,\beta]$ sijaitsevalla muuttujalla t korvaamalla $f(x)$ $f(g(t))$:llä ja dx lausekkeella $g'(t)dt$ (vrt. 1.12). Määrätyn integraalin tapauksessa ei ole tarpeen palata takaisin muuttujaan x sijoituksella $t = g^{-1}(x)$, joten emme nyt tarvitse g:n bijektiivisyyttä. Sen sijaan *muutetaan x-rajat a ja b t-rajoiksi α ja β*:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \tag{1.42}$$

Huomautus. Jos yllä olisi ollut $g(\alpha) = b$ ja $g(\beta) = a$, sijoituskaava pätisi muodossa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(t))g'(t)dt. \tag{1.43}$$

Sijoituskeinon idea kaaviona:



$x = g(t)$, $f(x) = f(g(t))$, $dx = g'(t)dt$.

Suure $dx = g'(t)dt$ ilmoittaa pituusmittojen paikallisen muutoksen kuvauksessa g: "pieni" t-väli t_0:n ympäriltä muuttuu x-väliksi pisteen $x_0 = g(t_0)$ ympärille niin, että välin pituus tulee suureella $|g'(t_0)|$ kerrotuksi (pientä häiriötermiä vaille; vrt. syksyn kurssin differentiaalikehitelmä).

1.44 Esimerkki. (i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^4}dx$. Sijoitetaan $x = \sqrt{t} = g(t)$ eli $x^2 = t$, jolloin $2xdx = dt$. Rajoja varten kannattaa totutella piirtämään taulukko, jolloin aina muistaa rajojen muuttamisen:

x	t
0	0
2	4

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big/_0^4 \overline{\text{arc}}\tan t = \frac{1}{2}\overline{\text{arc}}\tan 4 - \frac{1}{2}\overline{\text{arc}}\tan 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\overline{\text{arc}}\tan 4}}.$$

(ii) Olkoon $a > 0$ ja $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Jos f on *pariton*, ts. $f(-x) \equiv -f(x)$, niin $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, sillä sijoitus $x = -t$ antaa

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{a}^{0} (-f(t))(-dt) = \int_{a}^{0} f(t)dt =$$

$$= -\int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(x)dx$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Jos f on *parillinen*, ts. $f(-x) \equiv f(x)$, niin sama sijoitus $x = -t$ antaa (laske!)

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = +\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx,$$

joten parillisella funktiolla f pätee

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Esimerkki. (i) $\int_{-1}^{1} \sin(x^3)dx = 0$, sillä funktio $f(x) = \sin(x^3)$ on pariton: $\sin((-x)^3) = \sin(-x^3) = -\sin(x^3)\ \forall x \in [-1, 1]$.

(ii)
$$\int_{-M}^{M} e^{x^2}dx = 2\int_0^M e^{x^2}dx,$$

sillä $f(x) = e^{x^2}$ on parillinen. Tätä integraalia ei voi laskea alkeisfunktioiden avulla, mutta sarjakehitelmän avulla saa likiarvoja:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^M e^{x^2} dx = \Big/_{\!0}^{\!M} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{x^{2k+1}}{k!} = M + \frac{M^3}{3} + \frac{M^5}{5 \cdot 2!} + \frac{M^7}{7 \cdot 3!} + \dots,$$

josta katkaisemalla saa mielivaltaisen tarkkoja likiarvoja integraalille. Tämä lasku perustui siihen syksyn kurssilla mainittuun asiaan, että potenssisarjoja saa suppenemisvälillä integroida ja derivoida termeittäin.

Määrätyn integraalin sovelluksia

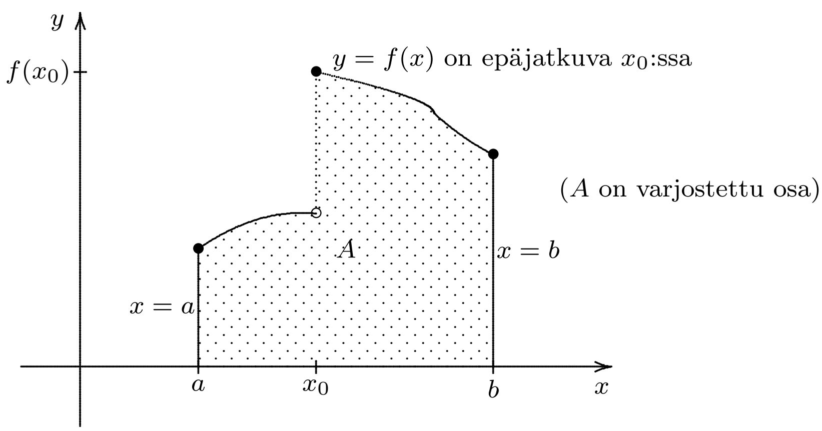
Suoraan määrittelytavasta on ilmeistä, että määrätyn integraalin avulla saa laskettua eräitä pinta-aloja.

1.45 Lause. *Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita (yleensä f ja g ovat sovelluksissa jatkuviakin).*

(a) *Jos $f(x) \geq 0$, niin käyrän $y = f(x)$ sekä suorien $y = 0$, $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman joukon*

$$A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\} \quad \textit{ala on} \int_a^b f(x)dx.$$

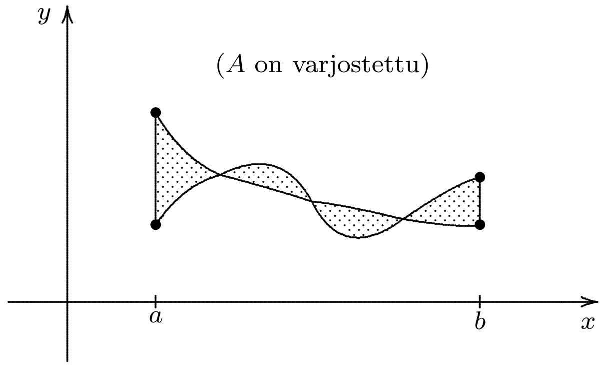
Kuva a)*-kohdasta*



(b) *Käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ ja suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman joukon*

$$A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\ y \text{ on } f(x)\text{:n ja } g(x)\text{:n välissä}\} \quad \textit{ala on} \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Kuva b)*-kohdasta jatkuvilla* f *ja* g*:*



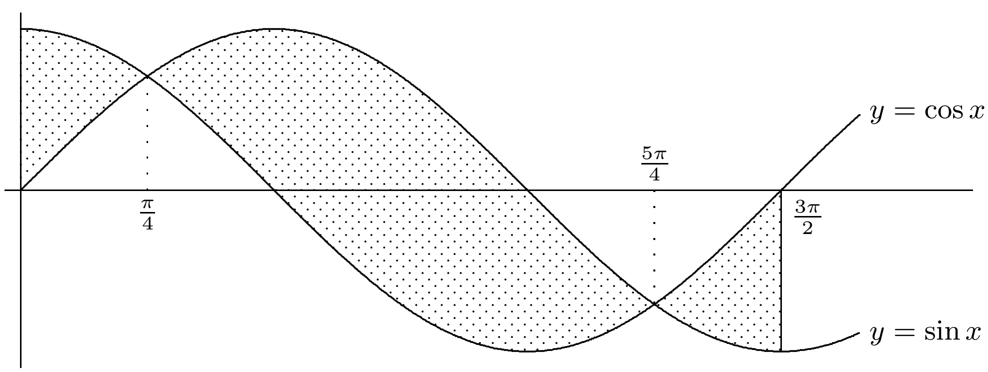
Todistus. Todistus edellyttäisi pinta-alan käsitteen hyvää määrittelyä, sivuutamme sen. $\square$

1.46 Esimerkki. Määritä käyrien $y = \sin x$, $y = \cos x$ ja suorien $x = 0$ ja $x = \frac{3\pi}{2}$ rajoittaman alueen pinta-ala

Ratkaisu. Määrätään aluksi ko. käyrien leikkauspisteet välillä $[0, \frac{3}{2}\pi]$:

$$\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \tan x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} \quad \text{tai} \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

Välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$ on $\cos x \geq \sin x$, välillä $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ on $\sin x \geq \cos x$ ja välillä $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ on taas $\cos x \geq \sin x$ (kuva alla).



Nyt 1.45 (b) antaa kysytyksi alaksi integraalin

$$A = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\sin x - \cos x|\, dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x)\, dx =$$

$$= \Big/_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) + \Big/_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (-\cos x - \sin x) + \Big/_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x + \cos x) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) + (-\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4}) +$$

$$+ (\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) + (\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2}) - (\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4}) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{5\pi}{4} - 2\cos\frac{5\pi}{4} - 2 =$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}} - 2 = \underline{\underline{4\sqrt{2} - 2}}$$

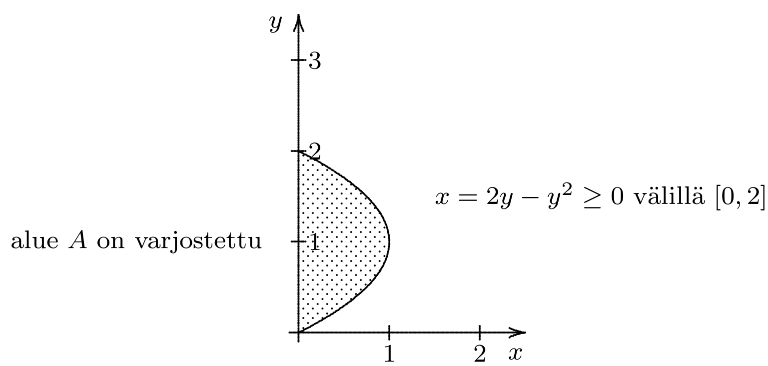
Alan laskemisessa kannattaa joskus integroida y:n suhteen: Käyrän $x = f(y) \geq 0$, y-akselin ja suorien $y = c$ ja $y = d$ rajoittaman alueen pinta-ala on $\int_c^d f(y)dy$.

1.47 Esimerkki. Käyrä $y^2 - 2y + x = 0$ ja y-akseli rajoittavat joukon A. Laske sen ala.

Ratkaisu. Lasketaan ensin käyrän ja y-akselin leikkauspisteet:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Kuva:



$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2,\ 0 \leq x \leq 2y - y^2\},$$

joten sen ala saadaan y:n suhteen integroimalla

$$\int_0^2 (2y - y^2)dy = \Big/_0^2 (y^2 - \frac{1}{3}y^3) = 4 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Toinen tapa: $y^2 - 2y + x = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 1 \pm \sqrt{1 - x}$, josta nähdään, että A:lla on esitys

$$A = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 1 - \sqrt{1 - x} \leq y \leq 1 + \sqrt{1 - x}\}.$$

Täten A:n ala saadaan myös integroimalla x:n suhteen seuraavasti:

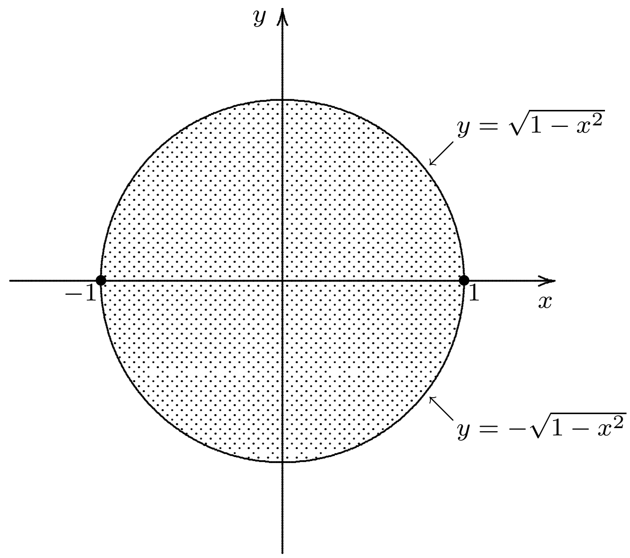
$$\int_0^1 \left[(1+\sqrt{1-x}) - (1-\sqrt{1-x})\right] dx = 2\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = 2\cdot\frac{2}{3}\Big/_0^1 - (1-x)^{3/2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

1.48 Esimerkki. Laske integroimalla yksikkökiekon

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

pinta-ala.

Ratkaisu.



$$A = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\},$$

joten sen ala on

$$\int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right) dx = 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

Sijoitus $x = \sin t$, jolloin $t = \overline{\text{arc}}\sin x$ ja $dx = \cos t\,dt$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2t+1}{2}dt =$$

$$= 2\Big/_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin 2t}{4} + \frac{1}{2}t\right) = \underline{\underline{\pi}},$$

sillä $\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}) = \sin(2\cdot\frac{-\pi}{2}) = 0.$

Seuraus. r-säteisen kiekon:

$$B = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2\}$$

ala on πr^2. Perusteluina voi käyttää (1.48):aa ja yhdenmuotoisuutta: alojen suhde on säteiden suhteen $r : 1$ neliö eli r^2. Myös voisi laskea suoraan integroimalla B:n alan integraalina (perustele!)

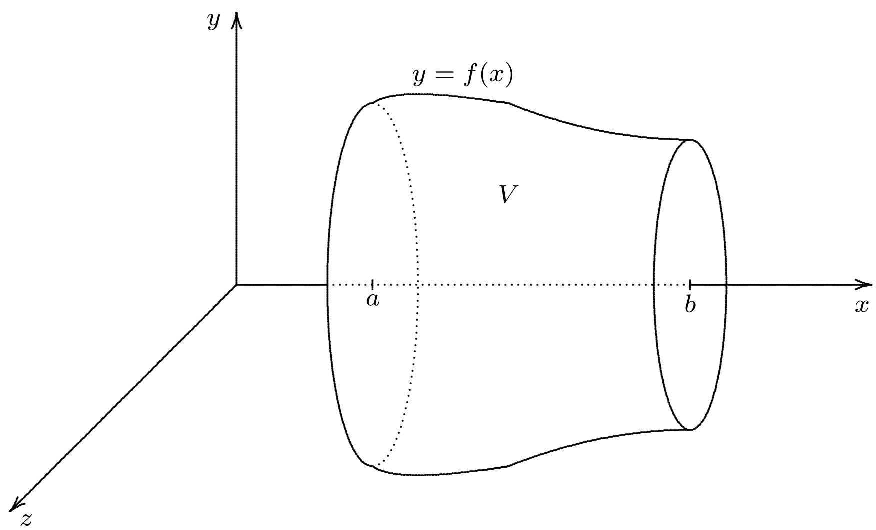
$$2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - (x - x_0)^2}\, dx,$$

sijoituksen $x = x_0 + r \sin t$ avulla samaan tapaan kuin yllä.

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Kun käyrä $y = f(x)$ pyörähtää xyz-avaruudessa $\mathbb{R}^3$ x-akselin ympäri, syntyy *pyörähdyskappale*

(1.49) $$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$$

Kuva:



1.50 Lause. *Pyörähdyskappaleen V (1.49) tilavuus on*

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Jos f on jatkuvasti derivoituva, niin V:n vaipan ala on

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Todistus. Sivuutetaan (taustatietoina tarvittaisiin tilavuuden ja pinta-alan käsitteiden analyysiä). $\square$

1.51 Esimerkki. Laske r-säteisen kuulan tilavuus ja pinta-ala.

Ratkaisu. Yhtenevyydestä seuraa, että riittää laskea origokeskisen kuulan $B(r) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$ tilavuus ja pinta-ala:

$$B(r) = \{(x,y,z) \mid -r \le x \le r,\ y^2+z^2 \le r^2 - x^2\}$$

on r-säteisen puoliympyrän

$$y = \sqrt{r^2-x^2} = f(x), \quad -r \le x \le r,$$

pyörähdyskappale, joten sen tilavuus on

$$\pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2-x^2)dx = \pi \Big/_{-r}^{r} (r^2x - \frac{x^3}{3}) =$$

$$= \pi \left(r^3 - (-r)^3 - \frac{r^3}{3} - (-\frac{r^3}{3}) \right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$B(r)$:n alaa laskettaessa joudutaan oikeastaan laskemaan *epäoleellinen integraali* (myöhempi asia): $B(r)$:n ala on

$$2\pi \int_{-r}^{r} \underbrace{\sqrt{r^2-x^2}}_{|f(x)|} \underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}}_{(f'(x))^2} dx \overset{(*)}{=} 2\pi \int_{-r}^{r} r dx = 4\pi r^2$$

Yhtälö $(*)$ saadaan suoralla sievennyksellä (tee!), mutta laskussa on ongelmana se, että $f'(x)$ on jatkuva vain avoimella välillä $]-r, r[$ (eikä silläkään rajoitettu). Ongelman käsittely opitaan pian jatkossa.

1.52 Lause (käyrän pituus integraalin avulla).
(a) *Jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva, niin käyrän $y = f(x)$, $a \le x \le b$, pituus on*

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx.$$

(b) *Jos $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ ja $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia ja jos kuvaus $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ on (ainakin melkein) injektio, niin käyrän $\big\{\big(x(t), y(t)\big) \mid a \le t \le b\big\}$ pituus on*

$$\int_a^b \sqrt{x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Todistus. Sivuutetaan. Oletus ”melkein injektiivisyydestä” tarvitaan sen takaamiseksi, että osaa pituudesta ei laskettaisi useampaan kertaan. Tässä ei haittaa, vaikka jokin yksittäinen piste tulisi useammalla tavalla muodossa $\big(x(t), y(t)\big)$. $\square$

Huomautus. 1) Käyrän esitysmuotoa $\{(x(t), y(t)) \mid a \le t \le b\}$ sanotaan sen *parametriesitykseksi* ja muuttujaa t *parametriksi.*

2) Kohta (a) on erikoistapaus

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad a \le x \le b \quad \text{(parametrina) } x$$

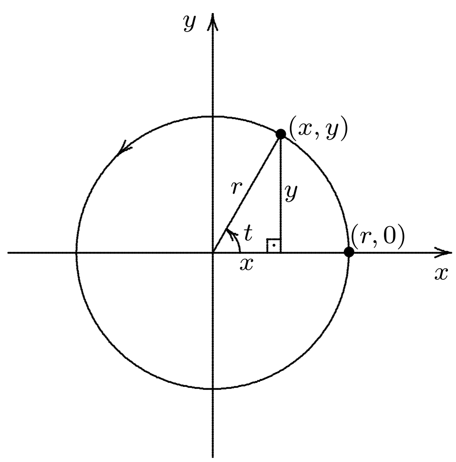
kohdasta (b), sillä nyt $x' = 1$, $y' = f'(x)$ ja $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

1.53 Esimerkki. Koska r-säteisellä ympyrällä on parametriesitys

$$\begin{cases} x = r\cos t \; (\Rightarrow \; x' = -r\sin t) \\ y = r\sin t \; (\Rightarrow \; y' = r\cos t) \qquad \text{(napakoordinaatit)} \\ 0 \le t \le 2\pi (r \text{ vakio}), \end{cases}$$

sen pituudeksi saadaan

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$



(Ihan tarkka injektio tämä parametriesitys ei ole, sillä $(r, 0)$ tulee arvoilla $t = 0$ ja $t = 2\pi$.)

Epäoleelliset integraalit

Jos $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ $(a < b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ a \in \mathbb{R})$ on integroituva $[a, b[$:n suljetuilla osaväleillä $[a, c]$ $(a < c < b)$, määritellään *epäoleellinen integraali*

(1.54) $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx,$$

edellyttäen, että tämä raja-arvo on olemassa. Jos $\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, sanotaan integraalia (1.54) *suppenevaksi*. Jos raja-arvoa (1.54) ei ole olemassa tai jos se on ∞ tai $-\infty$, integraalia (1.54) sanotaan *hajaantuvaksi*.

Vastaavasti määritellään epäoleelliset integraalit

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx, \tag{1.55}$$

tapauksessa, jossa $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$) on integroituva väleillä $[c, b]$ ($a < c < b$).

Huomautuksia. (i) *Jatkuville* funktioille $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ oletus integroituvuudesta yli suljettujen välien $[a, c]$ ($a < c < b$) on aina voimassa lauseen 1.35 nojalla.
(ii) Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on integroituva, niin

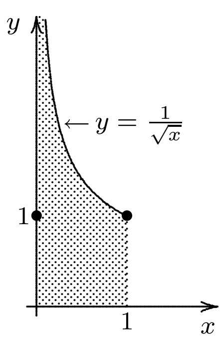
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c \to a+} \int_c^b f(x)dx,$$

joten tässä tapauksessa epäoleellinen integraali yhtyy tavalliseen integraaliin eikä uutta käsitettä tule.

1.56 Esimerkki.

(i) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \Big/_{\!\epsilon}^{1} 2\sqrt{x} = \lim_{\epsilon \to 0+} (2\sqrt{1} - 2\sqrt{\epsilon}) = 2,$$

joten epäoleellinen integraali $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ suppenee kohti lukua 2.



$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Kuvassa varjostettu (rajoittamaton) ala on siis 2.

Sama tulos saadaan (periaatteessa virheellisellä) "huolettomalla" laskulla

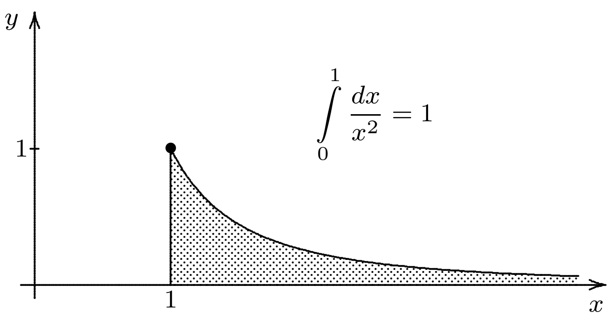
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big/_{\!0}^{1} 2\sqrt{x} = 2.$$

(ii) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x} = \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M \ln x = \lim_{M\to\infty} (\ln M - \underbrace{\ln 1}_{0}) = \infty,$$

joten epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ hajaantuu kohti ääretöntä.

(iii) $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \lim_{M\to\infty} \Big/_1^M -\frac{1}{x} = \lim_{M\to\infty} (-\frac{1}{M} + \frac{1}{1}) = 1,$$

joten alla olevan kuvan varjostettu pinta-ala = 1:



(iv) $$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to 0+} \Big/_\epsilon^1 \ln x = \lim_{\epsilon\to 0+} (\ln 1 - \ln \epsilon) = -(-\infty) = \infty,$$

joten epäoleellinen integraali $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ hajaantuu kohti ääretöntä.

Olkoon sitten $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\ a < b)$ integroituva yli välien $[c,d] \subset\ ]a,b[$. Valitaan $c \in\ ]a,b[$ ja määritellään

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{1.57}$$

Kaavassa (1.57) vaaditaan siis, että *molemmat oikean puolen epäoleelliset integraalit suppenevat*. Tällöin näin tapahtuu kaikilla $c \in\ ]a,b[$ ja kaavan (1.57) oikea puoli ei riipu c:n valinnasta lauseen 1.32 (e) nojalla.

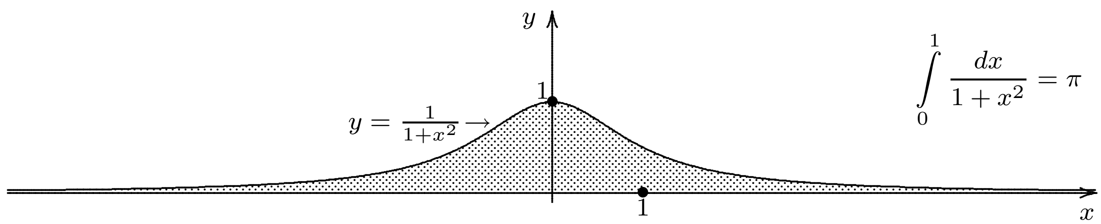
1.58 Esimerkki. i) Koska

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} (\overline{\text{arc}}\tan M - \overline{\text{arc}}\tan 0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

ja samoin (parillisuus!) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$, on

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

ts. alla olevassa kuvassa varjostettu ala $= \pi$:



ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\, dx$ hajaantuu, sillä lausekkeella

$$I_M = \int_0^M \sin x\, dx = \Big/_0^M - \cos x = 1 - \cos M$$

ei ole raja-arvoa, kun $M \to \infty$ (se saa arvoilla $M > a$ kaikki 0:n ja 2:n väliset arvot riippumatta luvun $a > 0$ valinnasta). [Silti $\displaystyle\int_{-M}^M \overbrace{\sin x}^{\text{pariton}}\, dx = 0 \to 0$, kun $M \to \infty$. Syy: ala- ja yläraja riippuvat tässä toisistaan, minkä määritelmä 1.57 (implisiittisesti) torjuu.]

iii) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$ hajaantuu, sillä vaikka $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ suppeni kohti lukua 1 (1.56 iii), niin $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ hajaantuu kohti ääretöntä:

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^2} = -\Big/_\epsilon^1 \frac{1}{x} = \frac{1}{\epsilon} - 1 \to \infty, \quad \text{kun } \epsilon \to 0+.$$

Joskus suppenemisen tai hajaantumisen selvittämiseksi joudutaan turvautumaan arvioihin:

1.59 Lause. *Olkoot* $a < b \leq \infty$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *ja* $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *jatkuvia ja* $0 < f(x) \leq g(x)$.

i) *(Majoranttiperiaate) Jos* $\int_a^b g(x)dx$ *suppenee, suppenee myös* $\int_a^b f(x)dx$.

ii) *(Minoranttiperiaate) Jos* $\int_a^b f(x)dx$ *hajaantuu, hajaantuu myös* $\int_a^b g(x)dx$.

Todistus. i) Koska $\int_a^M f(x)dx$ ja $\int_a^M g(x)dx$ ovat f:n ja g:n positiivisuuden nojalla kasvavia M:n funktioita $[a, b[\to \mathbb{R}$ ja koska

$$\int_a^M f(x)dx \leq \int_a^M g(x)dx \overset{\text{oletus}}{\leq} \int_a^b g(x)dx = \sup_{a \leq M < b} \int_a^M g(x)dx \in \mathbb{R},$$

on $\int_a^M f(x)dx$ myös ylhäältä rajoitettu ja siten on olemassa

$$\lim_{M \to b-} \int_a^M f(x)dx = \sup_{a \leq M < b} \int_a^M f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

ii) Seuraa heti i):stä. $\square$

Huomautus. Vastaavaa pätee tietysti tapauksissa $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ ja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$.

1.60 Esimerkki. i) Suppeneeko $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x + x^6}$?

Ratkaisu.

$$0 \leq f(x) = \frac{1}{1 + x + x^6} \leq \frac{1}{x^6} \leq \frac{1}{x^2} = g(x),$$

kun $x \geq 1$. Tässä $\int_1^\infty g(x)dx$ suppenee kohti lukua 1 (1.56 iii), joten majoranttiperiaatteen nojalla

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1 + x + x^6} \quad \underline{\underline{\text{suppenee}}} \text{ (ja on } \leq 1).$$

ii) Suppeneeko $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$?

Ratkaisu. Koska $\dfrac{1}{x-\sqrt{x}} \geq \dfrac{1}{x}$ kaikilla $x \in [2,\infty[$ (sillä $x > x - \sqrt{x} > 0$ kaikilla $x \geq 2$) ja koska $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}$ hajaantuu kohti ∞ (1.56 ii), minoranttiperiaate näyttää, että

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x-\sqrt{x}} \quad \underline{\underline{\text{hajaantuu}}} \text{ (kohti } \infty).$$

iii) Millä s:n arvoilla $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s} < \infty$?

Ratkaisu. Jos $s \neq 1$, on

$$\int_1^M \frac{dx}{x^s} = \int_1^M x^{-s}dx = \Big/_1^M \frac{1}{-s+1}x^{-s+1} = \frac{1}{1-s}(M^{1-s}-1).$$

Jos tässä $s > 1$, on $M^{1-s} = \frac{1}{M^{s-1}} \to 0$, kun $M \to \infty$ ja siten

$$\int_1^M \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}(M^{1-s}-1) \to \frac{1}{s-1}, \text{ kun } M \to \infty,$$

joten arvoilla $s > 1$ $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ suppenee kohti lukua $\dfrac{1}{s-1}$ (vrt. (1.56 iii), jossa oli $s = 2$).

Jos $s < 1$, $M^{1-s} \to \infty$, kun $M \to \infty$, ja tällöin $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ hajaantuu kohti ∞.

Jos $s = 1$, $\displaystyle\int_1^M \frac{dx}{x}$ hajaantuu kohti ∞ (1.56 ii).

$$\underline{\underline{\text{Yhteenveto}: \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \quad \text{suppenee} \iff s > 1.}}$$

iv) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^s} \quad \text{suppenee} \iff s < 1$$

Laskut jätetään lukijalle. Eräs tapa: sijoituksella $x = \dfrac{1}{t}$ tämän voi palauttaa kohtaan (iii). Myös suora lasku on melko helppo kuten kohdassa (iii).

v) Suppeneeko $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$?

Ratkaisu. [Idea: 0:n lähellä $\sqrt{x}$ on ”paljon suurempi kuin” x, joten integraali on ”laatua” $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ja tämän tiedämme edeltä (1.56 i) suppenevaksi.]

Haetaan $\dfrac{1}{\sqrt{x}-x}$:lle yläraja $\dfrac{a}{\sqrt{x}}$. Arvaus: $a = 2$ toimii. Lasku vahvistaa asian (lähellä 0:aa):

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}-x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \;\Leftrightarrow\; 0 < x < 1 \text{ ja } \sqrt{x} < 2\sqrt{x} - x \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 0 < x < 1 \text{ ja } \sqrt{x} > 2x \;\Leftrightarrow\; 0 < x < 1 \text{ ja } x < \frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; 0 < x < \frac{1}{4}.$$

Siten välillä $\left]0, \frac{1}{4}\right[$ on

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-x} < \frac{2}{\sqrt{x}} = g(x)$$

ja koska $\int_0^{1/4} g(x)dx$ suppenee (1.56 i), niin majoranttiperiaatteen nojalla $\int_0^{1/4} f(x)dx$ suppenee. Siis $\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/4} f(x)dx + \int_{1/4}^{1/2} f(x)dx$ suppenee ja lopuksi

$$\int_0^{1/2} (-f(x))dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{x-\sqrt{x}} \quad \underline{\underline{\text{suppenee.}}}$$

1.61 Esimerkki. (Eulerin gammafunktio, betafunktio)

Yllä käsiteltyjen suppenevien integraalien $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$, $(0 < s < 1)$ ja majoranttiperiaatteen avulla on melko helppo näyttää, että kaikilla $\alpha > 0$ on olemassa luku

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \in \mathbb{R}.$$

Näin saadulla *Eulerin gammafunktiolla* on mielenkiintoisia ominaisuuksia. Se esimerkiksi yleistää kertoman (todistus induktiolla):

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Todennäköisyyslaskennassa esiintyy myös ns. *betafunktio*

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \in \mathbb{R} \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ja sille voi todistaa kaavan

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \forall \alpha, \beta > 0.$$

Tiheysfunktiot

1.62 Määritelmä. Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *tiheysfunktio*, jos epäoleellinen integraali $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ suppenee kohti lukua 1 ja $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Todennäköisyyslaskennassa tiheysfunktioilla on tärkeä rooli: Jos X on satunnaismuuttuja, jolla on tiheysfunktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, niin kaavat

$$P(X \leq a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$$

antavat ne todennäköisyydet, että X:n arvo osuu väleille $]-\infty, a]$ tai $[a, b]$.

X:n *odotusarvo* on tällöin

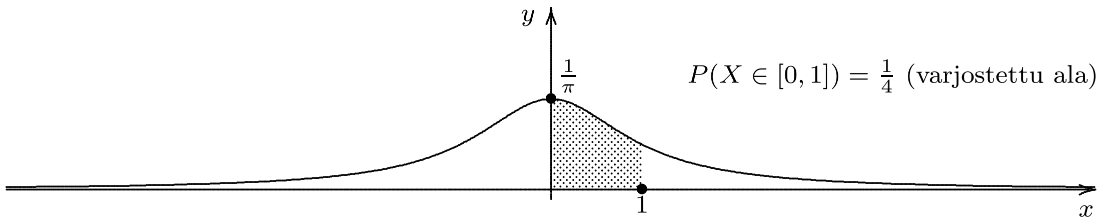
$$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

edellyttäen, että tämä integraali suppenee.

1.63 Esimerkki. i) Esimerkin 1.58(i) mukaan $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, joten $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ on tiheysfunktio.

Jos satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktiona tämä f, niin

$$P(0 \le X \le 1) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}(\overline{\text{arc}}\tan 1 - \overline{\text{arc}}\tan 0) = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{1}{4}$$



Tällä satunnaismuuttujalla ei ole odotusarvoa, sillä

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad \text{hajaantuu, koska}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^M \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big/_0^M \ln(1+x^2) = \frac{1}{2\pi}\ln(1+M^2) \to \infty, \quad \text{kun } M \to \infty.$$

ii) $$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0 \end{cases} \qquad (\lambda > 0)$$

Tällöin f on (ns. *eksponenttijakauman* $\text{Exp}(\lambda)$) tiheysfunktio, sillä $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ suppenee kohti lukua 1, sillä

$$\int_{-\infty}^0 f(x)dx = 0 \text{ ja } \int_0^M \lambda e^{-\lambda x}dx = \Big/_0^M - e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda M} + 1 \to 1, \text{ kun } M \to \infty,$$

sillä $\lambda > 0$.

iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ on (*normeeratun normaalijakauman* $N(0,1)$) tiheysfunktio. Perustelu: $f(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja laskemme myöhemmin integraalin

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

napakoordinaattimuunnoksen ja tasointegraalin avulla. Sijoittamalla $x = \frac{1}{\sqrt{2}}t$ saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{2\pi}.$$