Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 17.12. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon c_0 reaalijonojen $x = (x_n)$, joille $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla $\|\cdot\|_\infty$. Onko joukko

$$A = \{x = (x_n) \in c_0 : x_n > 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\}$$

avoin avaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$? Perustele!

2. (i) Määrittele mitä tarkoitetaan vektoriarvoisen sarjan $\sum_{n=1}^\infty x_n$ suppenemisella Banachin avaruudessa E, kun $(x_n) \subset E$ on annettu jono. (ii) Tutki, suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^n \frac{t^n}{n}$ jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$? [Kurssin *Analyysi II* tietoja saa tässä pitää tunnettuina.]

3. (*teoria*) Todista Besselin epäyhtälö

$$\sum_{n=1}^\infty |(x|x_n)|^2 \leq \|x\|^2, \quad x \in E,$$

missä E on Hilbertin avaruus ja $(x_n) \subset E$ on ortonormaali jono.

4. Olkoon

$$(Vf)(x) = \int_0^x s^2 f(s)ds, \quad x \in [0,1], \quad f \in C(0,1).$$

(i) Näytä, että $V : C(0,1) \to C(0,1)$ on jatkuva lineaarikuvaus ja $\|V\| < 1$.
(ii) Onko V surjektio $C(0,1) \to C(0,1)$? Perustele!

5. (*teoria*) Muotoile ja todista Banach-Steinhausin lause, eli tasaisen rajoituksen periaate, operaattoriperheelle $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset \mathcal{L}(E,F)$. [*Muistutus:* Bairen lause ja apujoukot $F(n,\alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}, \alpha \in J$.]

6. Näytä sopivan Hahn-Banachin lauseen avulla että on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* : \ell^\infty \to \mathbf{R}$, että $\|x^*\| = 1$ ja

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

kaikilla suppenevilla reaalijonoilla $x = (x_n)$. Avaruus ℓ^∞ on varustettu sup-normilla.

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 12.11. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon $C(0,1)$ jatkuvien funktioiden $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|$. Etsi rajoitettu jono $(f_n)\subset C(0,1)$ jolla ei ole suppenevia osajonoja. Perustele!

2. (i) Määrittele rajoitettujen lineaaristen operaattoreiden muodostama avaruus $(\mathcal{L}(E),\|\cdot\|)$, missä $\|\cdot\|$ on operaattorinormi ja E on Banachin avaruus.
(ii) Onko joukko
$$\{U\in\mathcal{L}(\ell^1):\|Ue_1-e_1\|_1<1\}$$
avoin joukko avaruudessa $(\mathcal{L}(\ell^1),\|\cdot\|)$, kun $e_1=(1,0,0,\ldots)\in\ell^1$?

3. Esitä miten voidaan laskea
$$\min_{a,b\in\mathbf{R}}\int_{-1}^{1}|t^2-a-bt|^2dt$$
tulkitsemalla tehtävää sopivan Hilbertin avaruuden minimointiongelmaksi. Perustele miksi kyseinen minimi on olemassa.

4. (*teoria*) Olkoon E Banachin avaruus ja $T\in\mathcal{L}(E)$ sellainen jatkuva lineaarinen operaattori että $\|T\|<1$. Osoita, että $I-T$ on kääntyvä operaattori $E\to E$ ja
$$(I-T)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=I+T+T^2+\ldots.$$
Tässä I on identtinen kuvaus $E\to E$.

5. (*teoria*) Muotoile avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet. Todista suljetun kuvaajan lause lähtien avoimen kuvauksen lauseesta.

6. (*teoria*) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z)=(z|x)$ kun $x,z\in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus $x\mapsto f_x$ on liittolineaarinen bijektiivinen isometria $E\to E^*$, missä E^* on avaruuden E duaali.*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 14.8. 2008

Tee viisi (5) seuraavista tehtävistä

1. Määrittele jonoavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p \leq \infty$. Etsi rajoitettu jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$, jolla ei ole normissa $\|\cdot\|_p$ suppenevia osajonoja.

2. (*teoria*) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $F \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $x_0 \in F$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in F\}.$$

3. Asetetaan $(Uf)(t) = \int_0^t sf(s)ds$ kun $t \in [0,1]$ ja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus. Näytä, että U on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$, ja sen operattorinormi $\|U\| \leq \frac{1}{2}$. Perustele lyhyesti miksi operattorilla $I - U$ on jatkuva käänteisoperaattori $(I-U)^{-1} : C(0,1) \to C(0,1)$. Edellä $C(0,1)$ on jatkuvien kuvausten $[0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama Banachin avaruus varustettuna sup-normilla, ja I on avaruuden identtinen kuvaus.

4. Olkoot A ja B lineaarikuvauksia $\ell^2 \to \ell^2$, joille $AB - BA = I$ (missä I on avaruuden ℓ^2 identtinen kuvaus). Todista, että silloin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita. [*Idea.* Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^nA = nB^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Etsi tämän avulla ristiriita suurilla n jos A ja B olisivat rajoitettuja.]

5. (*teoria*) Muotoile ja todista Banach-Steinhausin lause (eli tasaisen rajoituksen periaate) operaattoriperheelle $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset \mathcal{L}(E,F)$. [*Muistutus:* joukot

$$F(n,\alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}, \alpha \in J,$$

ja Bairen lause (jonka sopivan version saa pitää tunnettuna).]

6. Olkoon $n \in \mathbf{N}$ kiinteä, ja

$$\mathcal{P}_n = \{p : p \text{ reaalikertoiminen polynomi, aste } deg(p) \leq n\}.$$

Perustele sopivan Hahn-Banachin lauseen avulla, miksi on olemassa sellainen sup-normissa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : C(0,1) \to \mathbb{R}$, että $\phi(p) = p'(0)$ kaikilla $p \in \mathcal{P}_n$. (Tässä $p'(0)$ on derivaatta origossa.)

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 12.6. 2008

1. Määrittele jonoavaruudet $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p < \infty$. Tutki, onko joukko

$$A = \{x = (x_k) \in \ell^p : |x_k| < k^{-2/p} \text{ kaikilla } k = 1, 2, \ldots\}$$

avoin avaruudessa $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$.

2. Olkoon $L^2(-1,1)$ reaalinen Hilbertin avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds, \quad f, g \in L^2(-1,1).$$

Olkoot $f_1(s) = 1, f_2(s) = s$ kun $s \in [-1,1]$. Selitä miten voidaan laskea funktion $g(s) = s^2$, $s \in [-1,1]$, ortoprojektio $P_M g$ (suljetulle) aliavaruudelle

$$M = \{af_1 + bf_2 : a, b \in \mathbf{R}\},$$

sekä määrää $P_M g$.

3. Olkoon E Banachin avaruus sekä $K \subset E$ suljettu, rajoitettu ja konveksi osajoukko. Olkoon $f : K \to K$ sellainen kuvaus, että

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in K.$$

Osoita, että $\inf\{\|x - f(x)\| : x \in K\} = 0$. [*Idea.* Kiinnitä $z \in K$ ja tutki apukuvauksia f_n, missä

$$f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{1}{n}z, \quad x \in K, \ n \in \mathbf{N}.$$

Tarkista, että Banachin kiintopistelauseen nojalla on olemassa $x_n \in K$ jolle $f_n(x_n) = x_n$ kun $n \in \mathbf{N}$. Tutki erotusta $x_n - f(x_n)$ kun $n \to \infty$.]

4. (*teoria*) Muotoile avoimen kuvauksen ja suljetun kuvaajan lauseet. Johda suljetun kuvaajan lause avoimen kuvauksen lauseesta.

5. (*teoria*) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z) = (z|x)$ kun $x, z \in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus $x \mapsto f_x$ on liittolineaarinen bijektiivinen isometria $E \to E^*$, missä E^* on avaruuden E duaali.*

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Erilliskoe 13.5. 2008

1. Määrittele Banachin avaruus $L^1(0,1)$. Etsi sellainen rajoitettu jono $(f_n) \subset L^1(0,1)$, että jonolla (f_n) ei ole suppenevia osajonoja avaruudessa $L^1(0,1)$.

2. Olkoon $L^2(0,2\pi)$ reaalinen Hilbertin avaruus, missä sisätulo on

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(s)ds, \quad f,g \in L^2(0,2\pi).$$

Olkoot h_1 ja h_2 funktiot $h_1(t) = 1, h_2(t) = \cos(t)$, missä $t \in [0,2\pi]$. Esitä jokin keino millä voidaan määrätä funktion g, missä $g(t) = \sin(t), t \in [0,2\pi]$, lähin piste (suljetusta) vektorialiavaruudesta

$$M = \{ah_1 + bh_2 : a,b \in \mathbf{R}\}.$$

Laske etäisyys $dist(g,M)$.

3. Olkoon $\phi(t) = 2t$ kun $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ja $\phi(t) = 2 - 2t$ kun $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$. Määritellään

$$(Tf)(t) = f(\phi(t)), \quad f \in C(0,1),\ t \in [0,1].$$

Näytä että T on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$, jolle $\|Tf\|_\infty = \|f\|_\infty$ kaikilla $f \in C(0,1)$. Onko T injektio tai surjektio?

4. Esitä Banach-Steinhausin lause, ja todista sen avulla seuraava tulos: *jos* $(a_k) \subset \mathbf{R}$ *on sellainen jono, että sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \textit{suppenee kaikilla } (x_k) \in c_0,$$

niin $(a_k) \in \ell^1$.

5. (*teoria*) Esitä Hahn-Banachin lauseen perusmuoto tapauksessa, missä skalaarikunta on $\mathbf{K}$. Johda seuraava tulos tästä peruslauseesta: *Olkoon E normiavaruus, $M \subset E$ vektorialiavaruus sekä $u^* : M \to \mathbf{K}$ jatkuva lineaarinen funktionaali. Tällöin on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* : E \to \mathbf{K}$, että $\langle x, u^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$ kaikilla $x \in M$ ja $\|x^*\| = \|u^*\|$.*

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 6.11. 2001

1. Olkoon E Hilbert avaruus, $(x_n) \subset E$ jono ja $x \in E$. Oletamme, että $(x_n|y) \to (x|y)$ kun $n \to \infty$ kaikilla $y \in E$, ja $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Näytä, että $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.

2. Määrittele jonoavaruudet c_0 ja ℓ^∞. Näytä:

(i) c_0 on separoituva avaruus.
(ii) ℓ^∞ ei ole separoituva avaruus.

3. Olkoon E Banach avaruus, sekä A ja B lineaarikuvauksia $E \to E$, joille pätee

$$AB - BA = I,$$

missä $I : E \to E$ on identtinen kuvaus. Todista, että tällöin A ja B eivät molemmat voi olla rajoitettuja operaattoreita.
[*Vihje.* Verifioi ensin induktiolla, että

$$AB^n - B^nA = nB^{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Jos A ja B olisivat rajoitettuja operaattoreita, johda tästä ristiriita arvioimalla sopivasti operaattorinormeja ylöspäin suurilla n.]

4. (*Teoria*) Esitä ja todista Frechet-Rieszin esityslause duaaliavaruudelle E^*, kun E on Hilbert avaruus.

5. (*Teoria*) Esitä ja todista Banach-Steinhausin lause (eli tasaisen rajoituksen periaate) kun $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset L(E, F)$ on kokoelma jatkuvia operaattoreita. [Bairen lauseen sopiva versio oletetaan tunnetuksi. Joukoista

$$F(n, \alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \le n\}, \quad n \in \mathbf{N},\ \alpha \in J,$$

on apua todistuksessa.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 9.10. 2001

1. Olkoot $A = \{(x_k) \in c_0 : |x_k| < \frac{1}{k},\ k \in \mathbf{N}\ \}$ ja $B = \{(x_k) \in c_0 : |x_k| \leq \frac{1}{k},\ k \in \mathbf{N}\ \}$. Onko A avoin joukko avaruudessa c_0 ? Entä onko B suljettu joukko ?

2. (*teoria*) Olkoon E Hilbert avaruus ja $K \subset E$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori $x_0 \in K$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in K\}.$$

3. Olkoon $C(0,1)$ jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ muodostama Banach avaruus varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Asetetaan

$$(Vf)(t) = t\int_0^t f(s)ds, \quad \text{kun } t \in [0,1], \quad f \in C(0,1).$$

Näytä, että V on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Onko olemassa sellainen vakio $c > 0$, että $\|Vf\|_\infty \geq c\|f\|_\infty$ kaikilla $f \in C(0,1)$?

4. Näytä sopivan Hahn-Banachin lauseen avulla että on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $f \in (\ell^\infty)^*$, että $f(1,1,\ldots) = 1$ ja $f(x_k) = 0$ kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^2$.

5. (*teoria*) Olkoon E ja F Banach avaruuksia, sekä $T \in \mathcal{L}(E,F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Määrittele kompakti operaattori, sekä lineaarisen operaattorin adjungaatti. Todista *Schauderin lause*: jos $T : E \to F$ on kompakti operaattori, niin sen adjungaatti $T^* : F^* \to E^*$ on myös kompakti. [Ascoli-Arzelan lause oletetaan tunnetuksi.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 6.8. 2001

1. (*teoria*) Olkoon E normiavaruus ja $x_n \in E$ kaikilla n. Määrittele mitä tarkoitetaan sarjan $\sum_n x_n$ suppenemisella sekä normisuppenemisella avaruudessa E. Osoita: normiavaruus E on täydellinen (eli Banach avaruus) jos ja vain jos sen jokainen normisuppeneva sarja $\sum_n x_n$ suppenee avarudessa E.

2. Etsi Hilbert avaruuden $L^2(0,1)$ rajoitettu jono (f_n), jolla ei ole suppenevia osajonoja.

3. (*teoria*) Olkoon E Banach avaruus ja $T \in L(E)$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että $\|T\| < 1$. Osoita, että operaattori $I - T$ on kääntyvä ja etsi lauseke käänteiskuvaukselle $(I-T)^{-1}$. Edellä I on identtinen kuvaus $E \to E$.

4. Olkoon E Banach avaruus, $M \subset E$ suljettu aliavaruus ja $S : M \to \ell^\infty$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa sellainen jatkuva lineaarikuvaus $T : E \to \ell^\infty$, että $Tx = Sx$ kaikilla $x \in M$ ja $\|T\| = \|S\|$. [*Pieni apu.* Asetetaan $\phi_k(z) = z_k$ kun $z = (z_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono ja $k \in \mathbf{N}$. Sovella sopiva Hahn-Banachin lause lineaarisiin funktionaaleihin $x \mapsto \phi_k(Sx)$, $M \to \mathbf{K}$, kun $k \in \mathbf{N}$.]

5. Esitä Ascoli-Arzelan lauseessa olevat ehdot osajoukon $H \subset C(0,1)$ relatiiviselle kompaktisuudelle. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinteä jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbf{R}$. Tutki Ascoli-Arzelan avulla, onko joukko $H = \{g_s : 0 \le s \le 1\} \subset C(0,1)$ relatiivisesti kompakti, kun

$$g_s(t) = g(st), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

[*Vihje.* Funktion g tasainen jatkuvuus auttaa.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 21.6. 2001

1. (*teoria*) Olkoon E normiavaruus ja $x_n \in E$ kaikilla n. Määrittele mitä tarkoitetaan sarjan $\sum_n x_n$ suppenemisella sekä normisuppenemisella avaruudessa E. Osoita: normiavaruus E on täydellinen (eli Banach avaruus) jos ja vain jos sen jokainen normisuppeneva sarja $\sum_n x_n$ suppenee avarudessa E.

2. Etsi Hilbert avaruuden $L^2(0,1)$ rajoitettu jono (f_n), jolla ei ole suppenevia osajonoja.

3. (*teoria*) Olkoon E Banach avaruus ja $T \in L(E)$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että $\|T\| < 1$. Osoita, että operaattori $I - T$ on kääntyvä ja etsi lauseke käänteiskuvaukselle $(I-T)^{-1}$. Edellä I on identtinen kuvaus $E \to E$.

4. Olkoon E Banach avaruus, $M \subset E$ suljettu aliavaruus ja $S : M \to \ell^\infty$ jatkuva lineaarikuvaus. Osoita, että on olemassa sellainen jatkuva lineaarikuvaus $T : E \to \ell^\infty$, että $Tx = Sx$ kaikilla $x \in M$ ja $\|T\| = \|S\|$. [*Pieni apu.* Asetetaan $\phi_k(z) = z_k$ kun $z = (z_k) \in \ell^\infty$ on rajoitettu jono ja $k \in \mathbf{N}$. Sovella sopiva Hahn-Banachin lause lineaarisiin funktionaaleihin $x \mapsto \phi_k(Sx)$, $M \to \mathbf{K}$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$.]

5. Esitä Ascoli-Arzelan lauseessa olevat ehdot osajoukon $H \subset C(0,1)$ relatiiviselle kompaktisuudelle. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinteä jatkuva funktio $[0,1] \to \mathbf{R}$. Tutki, onko joukko $H = \{g_s : 0 \le s \le 1\} \subset C(0,1)$ relatiivisesti kompakti, kun

$$g_s(t) = g(st), \quad t \in [0,1] \text{ ja } s \in [0,1].$$

[*Vihje.* Funktio g on tasaisesti jatkuva välillä $[0,1]$.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 16.3. 1999

1. Etsi Hilbert avaruudesta $L^2(0,1)$ sellainen rajoitettu jono (f_n), jolla ei ole suppenevia osajonoja.

2. (i) Tarkista, että Hilbert avaruudessa H pätee

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

kaikilla $x, y \in H$.

(ii) Näytä (i)-kohdan avulla, että integroituvien funktioiden avaruus $L^1(0,1)$ ei ole Hilbert avaruus (siis että sen normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ ei voi olla peräisin sisätulosta).

3. Olkoon $C(0,1)$ jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ muodostama Banach avaruus varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Asetetaan

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

kun $x \in [0,1]$ ja $f \in C(0,1)$. Näytä, että V on jatkuva lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Anna jokin yläraja operaattorinormille $\|V\|$.

4. (teoria) Muotoile ja todista Banach-Steinhausin lause (eli tasaisen rajoituksen periaate) operaattoriperheelle $\{T_i : i \in I\} \subset \mathcal{L}(E,F)$. [sopiva versio Bairen lauseesta saa pitää tunnettuna.]

5. Esitä Hahn-Banachin lause reaalisen normiavaruuden tapauksessa (lausetta **ei** tarvitse todistaa). Näytä tämän tiedon avulla, että on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $f : \ell^\infty \to \mathbf{R}$, että $f(x) = 0$ kaikilla jonoilla $x = (x_k) \in c_0$, mutta $f(\mathbf{1}) = 1$ kun $\mathbf{1} = (1,1,1,\ldots)$. Edellä c_0 on nollaan suppenevien jonojen muodostama vektoriavaruus.

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 15.12. 1998

1. (teoria) Johda avaruuden ℓ^p kolmioepäyhtälö Hölderin epäyhtälöstä kun $1 \leq p < \infty$.

2. Määrittele sarjan $\sum_n x_n$ suppeneminen Banach avaruudessa E. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ avaruudessa $C(0,1)$? Avaruudessa $C(0,1)$ on sup-normi.

3. Olkoon $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ reaalisen Hilbert avaruuden $L^2(0,1)$ sisätulo. Asetetaan

$$(Vf)(x) = \int_0^x tf(t)dt,$$

kun $x \in [0,1]$ ja $f \in L^2(0,1)$. Näytä, että V on jatkuva lineaarinen kuvaus $L^2(0,1) \to L^2(0,1)$.

4. Näytä Hahn-Banachin lauseen avulla, että on olemassa jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbf{R}$ siten, että $\phi(f) = f(0)$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $f : [0,1] \to \mathbf{R}$.

5. (teoria) Olkoon E ja F Banach avaruuksia, sekä $T \in \mathcal{L}(E,F)$ jatkuva lineaarinen operaattori. Määrittele kompakti operaattori, sekä lineaarisen operaattorin adjungaatti. Todista Schauderin lause: jos T on kompakti operaattori, niin sen adjungaatti $T^* : F^* \to E^*$ on myös kompakti.
[**Vihjeet.** Olkoon $K = \overline{TB_E} \subset F$. Tulkitse $H = B_{F^*}$ avaruuden $C(K)$ osajoukoksi sup-normissa ja sovella siihen Ascoli-Arzelan lausetta. Edellä $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ja $B_{F^*} = \{y^* \in F^* : \|y^*\| \leq 1\}$.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
Loppukoe 4.8. 1998

1. Näytä, että c_0 on separoituva avaruus, mutta ℓ^∞ ei ole separoituva.

2. Olkoon $L^2(0, 2\pi)$ reaalinen Hilbert avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)g(s)ds.$$

Annetaan funktio $h(s) \equiv 1$, $s \in [0, 2\pi]$. Etsi h:lle L^2-mielessä lähin funktio, joka on muotoa $a\sin(s) + b\cos(s)$ (missä $a, b \in \mathbf{R}$).

3. Näytä Hölderin epäyhtälön avulla, että ehto $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (\frac{1}{n}x_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ määrittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $S : \ell^2 \to \ell^1$ ja $S : c_0 \to \ell^2$.

4. (teoria) Olkoon E Banach avaruus, sekä $T \in \mathcal{L}(E)$ jatkuva lineaarikuvaus, jolle $\|T\| < 1$. Osoita, että lineaarinen operaattori $I - T$ on kääntyvä ja etsi lauseke käänteiskuvaukselle $(I - T)^{-1}$. Tässä I on identtinen kuvaus $E \to E$.

5. Esitä Hahn-Banachin lause reaalisen vektoriavaruuden tapauksessa (lausetta ei tarvitse todistaa). Näytä sen avulla, että on olemassa rajoitettu lineaarinen funktionaali $f \in (\ell^\infty)^*$ siten, että $f(1, 1, 1, \dots) = 1$ ja $f((x_n)) = 0$ kaikilla jonoilla $x = (x_n) \in \ell^1$ (eli $\sum_n |x_n| < \infty$).