Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
2. kurssikoe 6.5. 2008

Tee neljä (4) seuraavista tehtävistä.

1. (*teoria*) Olkoon E separoituva Hilbertin avaruus. Määrittele avaruuden E Hilbertin kanta (e_n). Esitä kolme yhtäpitävää ehtoa, joiden avulla voidaan tarkistaa onko annettu jono $(e_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset E$ avaruuden Hilbertin kanta. [Muotoilu riittää, ehtoja ei tarvitse todistaa yhtäpitäviksi !]

2. Olkoon $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ kiinteä jatkuva kuvaus jolle

$$\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)| < 1.$$

Näytä Neumannin sarjan avulla, että ehto $U(f) = f - g \cdot f$, missä $f \in C(0,1)$, määrittelee kääntyvän operaattorin $U : C(0,1) \to C(0,1)$, ja määrää käänteisoperaattori U^{-1}. Tässä $(g \cdot f)(x) = g(x)f(x)$ kun $x \in [0,1]$.

3. (i) Esitä suljetun kuvaajan lauseen sisältö. (ii) Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset E$ sellainen jono, että $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x^*\rangle| < \infty$ kaikilla jatkuvilla lineaarisilla funktionaaleilla $x^* \in E^*$. Osoita, että tällöin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, x^*\rangle| \le C\|x^*\| \quad \text{kaikilla } x^* \in E^*.$$

[*Idea.* Sovella suljetun kuvaajan lause lineaariseen kuvaukseen $U : E^* \to \ell^1$, missä $U(x^*) = (\langle x_n, x^*\rangle)_{n\in\mathbf{N}}$ kun $x^* \in E^*$.]

4. (*teoria*) Olkoon E Hilbertin avaruus, ja $f_x(z) = (z|x)$ kun $x, z \in E$. Todista Fréchet-Rieszin lause: *kuvaus* $x \mapsto f_x$ *on liittolineaarinen bijektiivinen isometria* $E \to E^*$.

5. Perustele miksi on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \to \mathbf{R}$, että $\|\phi\| = 1$ ja $\phi(f) = f(\frac{1}{3})$ kaikilla *jatkuvilla* funktiolla $f \in C(0,1)$.

Muista myös kurssikysely

http://www.math.helsinki.fi/kurssit/kysely/

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
2. välikoe 16.5. 2001

1. Olkoon

$$(Tf)(t) = \int_0^t s^2 f(s)ds, \quad t \in [0,1], \ f \in C(0,1).$$

Näytä, että T on rajoitettu lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$ ja laske operaattorinormi
* lyhyesti $\|T\|$. Perustele* miksi $I - T$ on bijektio ja käänteiskuvaus $(I-T)^{-1}$ on rajoitettu $C(0,1) \to C(0,1)$. Edellä I on identtinen kuvaus.

2. Esitä Ascoli-Arzelan lauseessa olevat kriteerit osajoukon $H \subset C(0,1)$ relatiiviselle kompaktisuudelle. Tutki, onko joukko $H = \{f_\alpha : \alpha \geq 0\} \subset C(0,1)$ relatiivisesti kompakti, kun

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha t^2}, \quad t \in [0,1].$$

3. Olkoot E ja F Banach avaruuksia sekä $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus. Määrittele adjungaattikuvaus T^*. Näytä: sulkeuma $\overline{TE} \subsetneq F$ aidosti jos ja vain jos on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $y^* \in F^*$ että $y^* \neq 0$ ja $T^* y^* = 0$. [*Vihje.* Sopiva Hahn-Banachin lauseen versio auttaa.]

4. (*Teoria*) Esitä ja todista Banach-Steinhausin lause (eli tasaisen rajoituksen periaate) kun $\{T_\alpha : \alpha \in J\} \subset L(E,F)$ on kokoelma jatkuvia operaattoreita. [Bairen lauseen sopiva versio oletetaan tunnetuksi. Joukoista

$$F(n,\alpha) = \{x \in E : \|T_\alpha x\| \leq n\}, \quad n \in \mathbf{N}, \alpha \in J,$$

on apua todistuksessa.]

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
2. välikoe 13.5. 1998

1. Olkoon $1 \leq p < \infty$ sekä $f \in L^\infty(0,1)$ kiinteä oleellisesti rajoitettu funktio. Asetetaan

$$(M_f(g))(t) = f(t)g(t)$$

kun $t \in [0,1]$ ja $g \in L^p(0,1)$. Näytä, että M_f on rajoitettu lineaarikuvaus $L^p(0,1) \to L^p(0,1)$, eli $M_f \in \mathcal{L}(L^p(0,1))$. Yritä laskea operaattorinormi $\|M_f\|$.

2. Olkoot $e_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ kun $k \in \mathbf{N}$ (1 k:nnellä paikalla) sekä $\mathbf{1} = (1,1,\ldots)$. Onko olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $x^* \in (\ell^\infty)^*$, että $x^*(\mathbf{1}) = 1$ ja $x^*(e_k) = 0$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$?

3. (Teoria) Olkoon H Hilbert avaruus. Muotoile ja todista Frechet-Rieszin esityslause duaaliavaruudelle H^*.

4. Esitä Ascoli-Arzelan lauseen ehdot joukon $H \subset C(0,1)$ relatiiviselle kompaktisuudelle. Osoita sen avulla, että joukko

$$H = \{f_\alpha : \alpha > 0\}$$

on relatiivisesti kompakti avaruudessa $C(0,1)$, kun $f_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha t)$, $t \in [0,1]$.