Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. kurssikoe 29.2. 2008

Tee neljä (4) seuraavista tehtävistä

1. Olkoon E reaalikertoiminen Hilbertin avaruus. Näytä, että

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y), \quad x, y \in E. \tag{1}$$

Näytä kaavan (1) avulla: jos $T : E \to E$ on lineaarikuvaus, jolle $\|Tu\| = \|u\|$ kaikilla $u \in E$, niin $(Tx|Ty) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in E$.

2. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n) \subset E$ jono. Määrittele vektoriarvoisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ suppeneminen avaruudessa E. Tutki jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} e_n$$

suppenee avaruudessa ℓ^1, missä $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (ykkönen n:nnellä paikalla) kun $n \in \mathbf{N}$.

3. Olkoon $C(0,1) = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} | \ f \text{ jatkuva}\}$ varustettuna sup-normilla $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Olkoon $g \in C(0,1)$ kiinteä funktio, ja

$$(U(f))(t) = g(t)f(t) + \int_0^1 f(s)ds, \quad t \in [0,1], f \in C(0,1).$$

Näytä, että U on jatkuva lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Määrää operaattorinormi $\|U\|$ jos oletetaan että $g(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0,1]$.

4. (*teoria*) Määrittele jonoavaruus $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ kun $1 \leq p \leq \infty$. Todista kolmioepäyhtälö normille $\|\cdot\|_p$ Hölderin epäyhtälön avulla tapauksessa $1 < p < \infty$. (Hölderin epäyhtälön saa olettaa tunnetuksi.)

5. (*teoria*) Olkoon H Hilbertin avaruus ja $F \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $x_0 \in F$, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in F\}.$$

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. välikoe 22.3. 2001

1. Etsi avaruudesta $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$ rajoitettu funktiojono (f_n), jolla ei ole suppenevia osajonoja.

2. Avaruus $L^2(0,2\pi) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbf{R} \mid f$ on 2-integroituva$\}$ on Hilbert avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(s)ds, \quad f, g \in L^2(0,2\pi).$$

Olkoon $h(s) = s, \ s \in [0,2\pi]$. Esitä jokin keino löytää funktiolle h lähin funktio g joka on muotoa $g(s) = a\cos(s) + b\sin(s), \ s \in [0,2\pi]$, missä $a, b \in \mathbf{R}$. Määritä kyseinen g.

3. (*Teoria*) Olkoon E separoituva Hilbert avaruus.
(i) *Esitä* kaksi eri ehtoa, joiden avulla voidaan tarkistaa onko annettu ortonormaali jono (e_n) avaruuden E ortonormaali kanta (eli Hilbertin kanta).
(ii) Todista *Besselin epäyhtälö*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|e_n)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{kaikilla } x \in E,$$

kun (e_n) on avaruuden E ortonormaali jono.

4. Olkoon $E = \{(x_k) : (x_k)$ on reaalijono, sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee$\}$, sekä

$$\|x\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|, \quad x = (x_k) \in E.$$

(i) Näytä, että $\|\cdot\|$ on normi vektoriavaruudessa E (missä summa ja skalaarilla kertominen on määritelty koordinaateittain).
(ii) Osoita, että $(E, \|\cdot\|)$ on Banach avaruus.
[*Vihje.* Epäyhtälön $|x_k| \leq |\sum_{j=1}^{k} x_j| + |\sum_{j=1}^{k-1} x_j|$ tapaiset arviot auttavat kun $k = 2, 3, \ldots$.]

~~17~~ osallistujaa
18

ka 16,8

Matematiikan laitos
Funktionaalianalyysin peruskurssi
1. välikoe 23.3. 1998

1. Asetetaan

$$(Tf)(t) = f(t) - \int_0^t f(s)ds$$

kun $t \in [0,1]$ ja $f \in C(0,1)$. Näytä, että T on jatkuva lineaarikuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Arvioi sen operaattorinormia $\|T\|$ ylöspäin (arvion ei tarvitse olla tarkka). Avaruudessa $C(0,1)$ on sup-normi.

2. Olkoon $L^2(-1,1)$ reaalinen Hilbert avaruus varustettuna sisätulolla

$$(f|g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(s)g(s)ds.$$

Olkoot lisäksi h_1 ja h_2 funktiot $h_1(x) = 1, h_2(x) = x$ kun $x \in [-1,1]$. Esitä jokin tapa laskea funktion $g(x) = x^2$ ortoprojektio $P_M(g)$ aliavaruudelle

$$M = \{ah_1 + bh_2 : a, b \in \mathbf{R}\},$$

sekä määrää $P_M(g)$.

3. (Teoriatehtävä) Olkoon H Hilbert avaruus ja $K \subset H$ suljettu konveksi joukko. Osoita, että on olemassa yksikäsitteinen $x_0 \in K$ siten, että

$$\|x_0\| = \inf\{\|x\| : x \in K\}.$$

4. Määrittele oleellinen sup-normi $\|\cdot\|_\infty$ välillä $[0,1]$ sekä mitallisten, oleellisesti rajoitettujen funktioiden avaruus $L^\infty(0,1)$. Osoita, että $L^\infty(0,1)$ ei ole separoituva.
[Vihjeet: totea esimerkiksi, että välien karakteristiset funktiot toteuttavat

$$\|\chi_{[0,t]} - \chi_{[0,s]}\|_\infty \geq 1$$

aina kun $0 \leq s < t \leq 1$. Yritä tämän jälkeen edetä kuten avaruuden ℓ^∞ vastaavassa argumentissa.]