Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 8
25.3. 2010

1. Olkoon $f \in L^2(0,2\pi)$ ja $P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$ kiinteä trigonometrinen polynomi. Laske konvoluutiofunktion

$$P \star f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(x-t) f(t) dt$$

Fourier-kertoimet $\widehat{P \star f}(m)$ funktioiden f ja P Fourier-kertoimien avulla. [Fubinin lausetta saa käyttää vapaasti.]

2. Näytä: jos $f \in L^2(0,2\pi)$ ja $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, niin $f : [0,2\pi] \to \mathbf{C}$ on jatkuva funktio (eli funktion f ekvivalenssiluokka L^2:ssa sisältää jatkuvan edustajan). [*Vihje.* Näytä, että vastaava Fourier-sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ on absoluuttisesti suppeneva Banachin avaruudessa avaruudessa $C(0,2\pi)$.]

3. Näytä, että funktio

$$h(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{jos } x \in [-1,1] \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

kuuluu Sobolev-avaruuteen $H^1(\mathbf{R})$ ja määritä sen heikko derivaatta $h' \in L^2(\mathbf{R})$.

4. Olkoon $f \in L^2 = L^2([0,2\pi])$ funktio jolle $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Riesz-Fischerin lauseen nojalla on olemassa sellainen $g \in L^2$, että $\hat{g}(n) = in\hat{f}(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Näytä, että g on funktion f heikko derivaatta, eli

$$\int_0^{2\pi} g(x)\phi(x)dx = -\int_0^{2\pi} f(x)\phi'(x)dx \quad \text{kaikilla } \phi \in \mathcal{D}((0,2\pi)).$$

[*Vihje:* todista aluksi väite kun f on trigonometrinen polynomi ja yleinen tapaus approksimoimalla.]

5. (*Banach-Saksin lause*) Olkoon (x_n) Hilbertin avaruuden E rajoitettu jono, jolle $\lim_{n\to\infty}(x_n|y) = 0$ kaikilla $y \in E$. Osoita: on olemassa osajono (x_{n_k}) jolle keskiarvot $y_m = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n_k} \to 0$ kun $m \to \infty$. [*Ohje:* Valitse induktiivisella konstruktiolla indeksit $n_1 < n_2 < \ldots$ joille $|(x_{n_{k+1}}|x_{n_j})| < \frac{1}{k+1}$ kaikilla $j = 1,\ldots,k$ ja $k \in \mathbb{N}$. Kehitä $\|y_m\|^2$ sisätulojen avulla.]

Pääsiäisen aikataulu: Luentoja ma 29.3 ja 31.3, sekä Harjoitus 9 torstaina 8.4. Luennot jatkuvat pääsiäsloman jälkeen maanantaina 12.4.