Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 7
18.3. 2010

1. Olkoon $F = \{f \in L^2(0,1) : \int_0^1 f d\mu = 0\}$.
(i) Määrää ortokomplementti $F^\perp$ etsimällä konkreettinen esitys $f = f_1 + f_2$, missä $f_1 \in F$.
(ii) Määrää etäisyys $dist(g, F) = \inf\{\|g - f\|_2 : f \in F\}$, missä $g(t) = e^t$ kun $t \in [0,1]$.

2. Olkoon (e_j) ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E ja (λ_j) sellainen skalaarijono, että sarja $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j$ suppenee avaruudessa E. Näytä, että sarja $\sum_{j=1}^\infty a_j \lambda_j e_j$ suppenee avaruudessa E kaikilla rajoitetuilla jonoilla $(a_j) \in \ell^\infty$. Anna esimerkki sellaisesta jonosta (λ_j), että sarja $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j$ suppenee, mutta ei absoluuttisesti.

3. Tarkastellaan Hilbertin avaruutta $L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. Laske funktion $g(t) = t,\ t \in [0, 2\pi]$, Fourier kertoimet ortonormaalin jonon $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ suhteen. Laske normi $\|g\|_2$ sekä integroimalla, että Parsevalin yhtälön avulla, kun pidetään tunnettuna että $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int})_{n \in \mathbf{Z}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2(0, 2\pi)$ (tämä seikka todistetaan luvussa 5; huomaa sivutuotteena kaava $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.)

4. Olkoon $(h_n)_{n=0}^\infty$ Haarin systeemi avaruudessa $L^2(0,1)$ (luennot, Esimerkki 4.41). Näytä, että (h_n) on ortonormaali jono.

5. Osoita, että Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=0}^\infty \subset L^2(0,1)$ on Hilbertin kanta etenemällä seuraavasti (käyttäen sopivia mittateorian tietoja): (i) Dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot $\chi_{\Delta_k} \in \overline{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$ in $L^2(0,1)$ kaikilla k, (ii) $\chi_G \in \overline{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$ kaikilla avoimilla joukoilla $G \subset [0,1]$, (iii) $\chi_A \in \overline{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$ kaikilla mitallisilla joukoilla $A \subset [0,1]$, (iv) mitalliset yksinkertaiset funktiot $f \in \overline{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$, (v) $L^2(0,1) = \overline{span}(\{h_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\})$.

Muistutus: 1. kurssikoe *torstaina 18.3 klo 16.00-18.00* salissa D123.
Koealue: monisteen luvut 1-4, kohdat 4.1 - 4.40 (ml. ortonormaali kanta). Huoneessa C326 (vuoden 2008 FApk:n kansiossa) kokoelma vanhoja koetehtäviä (osa myös linkitettynä kurssin kotisivulle).