

Funktionaalianalyysin peruskurssi

Harjoitus 6

4.3. 2010

1. Olkoon E \mathbb{R} -kertoiminen sisätuloavaruus. Totea, että *polarisaatiokaava*

$$4(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2, \quad x, y \in E,$$

pätee. (*Lisätieto:* \mathbb{C} -kertoimisessa tapauksessa vastaava kaava on muotoa

$$4(x|y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2, \quad x, y \in E.)$$

2. Näytä: (i) $A = \{f \in C(0, 1) : f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu konvekksi joukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita f .

(ii) $B = \{f \in C(0, 1) : f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t)dt = 1\}$ on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu konvekksi joukko, jossa ei ole yhtään normin minimoivaa alkioita.

3. Laske

$$\min_{a,b,c \in \mathbf{R}} \int_{-1}^1 |t^3 - a - bt - ct^2|^2 dt.$$

[*Ohje:* Etsi sopiva ortoprojektio Hilbertin avaruudessa $L^2([-1, 1])$.]

4. Olkoon E Hilbertin avaruus, M sen suljettu vektorialiavaruus ja asetetaan $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$. Osoita, että $M^{\perp\perp} = M$. [*Vihje:* Jos $x \notin M$, näytä että $x \notin M^{\perp\perp}$ Lauseen 4.20 avulla.]

5. Olkoon E Hilbertin avaruus ja $\emptyset \neq K \subset E$ suljettu konvekssi osajoukko. Minimointitulosten (Lauseet 4.17-4.18) nojalla on olemassa kuvaus $P_K : E \rightarrow E$, jolle $P_K x \in K$ ja $\|x - P_K x\| = \text{dist}(x, K)$ kaikilla $x \in E$. Osoita, että *metrinen projektio* P_K on kontraktio, eli

$$\|P_K x_1 - P_K x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E.$$

[*Ehdotus.* Olkoon $y_i = P_K x_i$ kun $i = 1, 2$. Lauseen 4.19 nojalla pätee $\text{Re}(x_i - y_i | z - y_i) \leq 0$ kaikilla $z \in K$ kun $i = 1, 2$. Sijoita $z = y_2$ kun $i = 1$, $z = y_1$ kun $i = 2$, ja laske arviot sopivasti yhteen. Lopuksi Cauchy-Schwarz.]

1. kurssikoe *torstaina 18.3 klo 16.00-18.00* salissa D123. Ottakaa yhteyttä luennoijaan jos aika ei sovi (vaihtoehto järjestään tarvittaessa)

Koealue: monisteen luvut 1-4, kohdat 4.1 - 4.40 (ml. ortonormaali kanta). Luennoilla ma 15.3. pieni muistutus koealueesta. Huoneessa C326 (vuoden 2008 FApk:n kansiossa) kokoelma vanhoja koetehtäviä.

Muistutus: Viikolla 9 on opetusta (luennot ma 1.3. ja ke 3.3., sekä harjoitus to 4.3.). II. periodi alkaa ma 15.3. (myös harjoitus to 18.3.)