Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 5
25.2. 2010

1. Olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^1$ (ykkönen n:nellä paikalla) kun $n = 1, 2, \ldots$. Asetetaan $A = \{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{-e_n + \frac{1}{n}e_1 : n \in \mathbf{N}\}$. Perustele miksi A ja B ovat avaruuden ℓ^1 suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, mutta summajoukko $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ei ole suljettu.

2. Näytä kiintopistelauseen avulla, että integraaliyhtälöllä

$$4f(x) - \int_0^1 f(s)^2 ds = x, \quad x \in [0,1],$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $f \in B_{C(0,1)} = \{f \in C(0,1) : \|f\|_\infty \leq 1\}$.

3. Olkoon (x_n) sellainen sisätuloavaruuden E jono, että $\|x_n\| \to \|x\|$ sekä $(x_n|x) \to \|x\|^2$ kun $n \to \infty$. Näytä, että $\|x_n - x\| \to 0$ kun $n \to \infty$.

4. Totea, että avaruudet $L^p(0,1)$, $1 \leq p < \infty, p \neq 2$, eivät ole Hilbertin avaruuksia (siis normi $\|\cdot\|_p$ ei ole minkään sisätulon indusoima). [*Ohje.* Testaa suunnikasyhtälön (monisteen Lause 4.6) voimassaoloa sopivilla yksinkertaisilla funktioilla f ja g.]

5. Olkoon E Banachin avaruus, $D \subset E$ suljettu osajoukko sekä $T : D \to D$ kuvaus. Osoita: jos $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n kpl) on aito kontraktio jollakin $n \geq 2$, niin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste. [*Ohje:* Banachin kiintopistelauseen nojalla kuvauksella T^n on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$. Näytä, että $T^{n-1}(x)$ on silloin T:n kiintopiste.]

Ehdotus: 1. kurssikoe järjestetään *torstaina 18.3 klo 16.00-18.00* salissa D123. Ottakaa yhteyttä luennoijaan jos aika ei sovi (vaihtoehtoinen koemahdollisuus järjestään tarvittaessa), e-mail: hojtylli@cc.helsinki.fi