Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 4
18.2. 2010

1. Asetetaan $\phi(f) = \int_0^1 s^{-1/4} f(s)ds$ kaikilla $f \in L^2(0,1)$. Näytä, että ϕ on jatkuva lineaarinen kuvaus $L^2(0,1) \to \mathbb{K}$. [*Muistutus:* Hölderin epäyhtälö L^p-avaruuksissa.]

2. Olkoon $1 \le p < \infty$. Todista L^p-avaruuksien Minkowskin epäyhtälö:

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in L^p(\Omega).$$

[Tapauksessa $1 < p < \infty$ imitoi Lauseen 2.22 todistusta ja käytä Hölderin epäyhtälöä L^p-avaruuksissa. Tapaus $p = 1$ on suoraviivaisempi.]

3. (i) Osoita, että

$$\sup_{t \in [0,1]} |f(t)| = \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |f(t)|$$

kaikilla jatkuvilla (reaaliarvoisilla) kuvauksilla $f \in C(0,1)$. Päättele, että $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on suljettu (vektori)aliavaruus.
(ii) Näytä, että inkluusio $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on aito tutkimalla esimerkiksi välin $I = [0, 1/2]$ karakteristista funktiota χ_I. [Muista, että avaruudessa $L^\infty(0,1)$ samaistetaan sellaiset funktiot, jotka poikkeavat toisistaan nollamittaisessa joukossa.]

4. Olkoon E, F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen jatkuva lineaarinen kuvaus, että $\|Tx\| \ge c\|x\|$ kaikilla $x \in E$ jollakin $c > 0$. Näytä, että T on injektio ja että kuvajoukko $T(E) = \{Tx : x \in E\}$ on F:n suljettu vektorialiavaruus. [*Apu:* voit tarkistaa, että $T(E)$ on täydellinen.]

5. Määritellään kuvaus $f : B_{\ell^2} \to \ell^2$ asettamalla

$$f(x) = (\frac{1}{2}(1 - \|x\|_2), x_1, x_2, \dots), \qquad \text{kun } x = (x_k) \in B_{\ell^2},$$

missä $B_{\ell^2} = \{x = (x_k) \in \ell^2 : \|x\|_2 \le 1\}$ on avaruuden ℓ^2 suljettu yksikköpallo. Näytä: (i) $f(B_{\ell^2}) \subset B_{\ell^2}$, (ii) $\|f(x) - f(y)\|_2 \le \frac{\sqrt{5}}{2}\|x - y\|_2$ kaikilla $x, y \in B_{\ell^2}$, (iii) ei ole olemassa sellaista jonoa $x \in B_{\ell^2}$, että $f(x) = x$.

1. kurssikoe järjestetään viikon 11 aikana (15.-19.3) väliviikon jälkeen. Tarkempi ajankohta ilmoitetaan vähän myöhemmin.