

Funktionaalianalyysin peruskurssi

Harjoitus 3

11.2. 2008

1. Olkoon  $E$  normiavaruus ja  $F \subset E$  sen aito vektorialiavaruus (eli siis  $F \neq E$ ). Voiko  $F$  olla avoin joukko avaruudessa  $E$ ? [*Vihje*: jos vektori  $x \notin F$ , tarkastele origosta lähtevää puolisuoraa  $\{\lambda x : \lambda \geq 0\}$ .]

2. Olkoon  $1 \leq p < \infty$  ja kiinnitetään rajoitettu jono  $(a_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$ . Näytä, että kuvaus  $Tx = T(x_k)_{k=1}^\infty = (a_k x_k)_{k=1}^\infty$ , kun  $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ , määrittelee rajoitetun lineaarisen operaattorin  $\ell^p \rightarrow \ell^p$ . Laske sen normi  $\|T\|$ .

3. Suppeneeko (funktio)sarja  $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{t^n}{n}$  Banachin avaruudessa  $C(0, 1)$ ? Entä suppeneeko kyseinen sarja absoluuttisesti avaruudessa  $C(0, 1)$ ? [Edellä sarjan  $n$ :s termi on siis funktio  $t \mapsto (-1)^n \frac{t^n}{n}$ . Muista Analyysi II:sta vuorottelevat sarjat ja Leibniz'in lause.]

4. Olkoon  $E$  Banachin avaruus ja  $T : E \rightarrow \mathbb{R}$  lineaarinen kuvaus. Kuvauksen  $T$  ydin on

$$\text{Ker}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}.$$

Osoita:  $T$  on jatkuva jos ja vain jos  $\text{Ker}(T)$  on  $E$ :n suljettu vektorialiavaruus. [*Vihje*: suuntaan " $\Leftarrow$ " oletetaan, ettei  $T$  ole jatkuva origossa ja näytetään, että  $\text{Ker}(T)$  ei ole suljettu.]

5. Kiinnitetään  $0 < \alpha < 1$  ja olkoon  $Lip_\alpha$  sellaisten funktioiden  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  joukko, joille

$$\|f\|_\alpha = |f(0)| + \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} < \infty.$$

Näytä aluksi, että  $Lip_\alpha$  on vektoriavaruus ja että  $\|\cdot\|_\alpha$  on normi. Osoita sen jälkeen, että  $(Lip_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$  on Banachin avaruus. (Huomaa että

$$|f(s) - f(t)| \leq \|f\|_\alpha \cdot |s - t|^\alpha \text{ kaikilla } s, t \in [0, 1], f \in Lip_\alpha.$$

Sanotaan usein, että  $f$  on Hölder-jatkuva potensilla  $\alpha$ , tai kertaluvun  $\alpha$  Lipschitz-funktioksi.)

Kurssin kotisivulla on nyt myös linkki vuoden 2010 luentoversioon, joka päivittyy kurssin edetessä noin kerran viikossa (yleensä loppuviikosta):

<http://wiki.helsinki.fi/pages/viewpage.action?pageId=49513258>