Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 2
4.2. 2010

1. Tutki ovatko seuraavat joukot avoimia (avaruuksien vastaavien sup-normien suhteen):

$$A = \{f \in C(0,1) : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1]\},$$
$$B = \{(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} : x_k > 0 \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\}.$$

2. Olkoon $1 < p < \infty$. Etsi sellainen jono $(x^{(n)}) \subset \ell^p$, että $\|x^{(n)}\|_p \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja jonolla $(x^{(n)})$ ei ole normissa $\|\cdot\|_p$ suppenevia osajonoja. Tässä $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in \ell^p$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. [*Huom.:* Tämän esimerkin perusteella suljettu yksikköpallo B_{ℓ^p} siis ei ole kompakti joukko avaruudessa ℓ^p.]

3. Olkoon $1 \leq p < q \leq \infty$. Näytä, että $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ kun $x = (x_n) \in \ell^p$. Päättele, että $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0$ kun $1 \leq p < q \leq \infty$. [*Vihje.* Tutki aluksi sellaista jonoa $x = (x_n) \in \ell^p$ jolle $\|x\|_p = 1$.]

4. Määritellään

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{t}} f(t)dt, \quad x \in [0,1],$$

kaikilla $f \in C(0,1)$. Näytä, että T on (hyvin määritelty) rajoitettu lineaarinen kuvaus $C(0,1) \to C(0,1)$. Anna jokin yläarvio T:n normille $\|T\|$.

5. Osoita, että rajoitettujen jonojen avaruus $(\ell^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$ ei ole separoituva. [*Vihje*: Tutki esimerkiksi karakterististen funktioiden $\{\chi_A : A \subset \mathbf{N}\} \subset \ell^{\infty}$ muodostamaa jonoperhettä, tai diagonalisoi. Voit vapaasti käyttää tietoa, että potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = \{A : A \subset \mathbf{N}\}$ on ylinumeroituva. Tässä $\chi_A(n) = 1$ jos $n \in A$ ja $\chi_A(n) = 0$ jos $n \notin A$, kun $A \subset \mathbb{N}$.]