

Funktionaalianalyysin peruskurssi

Harjoitus 13

6.5. 2010

1. Olkoon E kompleksinen normiavaruus ja E_r vastaava reaalikertoiminen normiavaruus (luonnollisella tavalla tulkittuna). Asetetaan $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$, kun $f_1 \in (E_r)^*$ ja $x \in E$. Näytä, että f on \mathbf{C} -lineaarinen funktionaali $E \rightarrow \mathbf{C}$ ja $\|f\| = \|f_1\|$.

2. Perustele miksi on olemassa sellainen jatkuva lineaarinen funktionaali $\phi : L^\infty(0,1) \rightarrow \mathbf{R}$, että $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$ kaikilla jatkuvilla funktioilla $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$. [Vinkki: $C(0,1) \subset L^\infty(0,1)$ on suljettu aliavaruus (HT 4:3) ja sopiva Hahn-Banachin lauseen versio.]

3. Olkoon E Banachin avaruus, ja $(x_n) \subset E$ sellainen jono, että $\lim_n x^*(x_n) = 0$ kaikilla $x^* \in E^*$. Osoita, että joukko $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ on rajoitettu E :ssä. [Vihje: Banach-Steinhausin lause sovellettuna biduaalissa E^{**} .]

4. Olkoon Banachin avaruuden E duaaliavaruus E^* separoituva. Osoita, että tällöin E on separoituva. [Idea: olkoon (x_n^*) tiheä jono avaruudessa E^* ja valitse alkiot $x_n \in E$, joille $\|x_n\| = 1$ ja $x_n^*(x_n) \geq (1/2)\|x_n^*\|$ kaikilla n . Näytä sopivan Hahn-Banachin version avulla, että suljettu lineaarinen verho $\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbf{N}\} = E$.]

5. Osoita, että jokainen Hilbertin avaruus E on refleksiivinen. [Vihjeet. Olkoon $\sigma : E \rightarrow E^*$ Frechet-Rieszin lauseen antama liittolineaarinen isometria. Tarkista, että $(\sigma(x)|\sigma(y)) = (y|x)$, kun $x, y \in E$, on sisätulo avaruudessa E^* , joka antaa duaaliavaruuden normin. Olkoon $\tau : E^* \rightarrow E^{**}$ vastaava Frechet-Rieszin liittolineaarinen isometria. Tarkista, että $J_E = \tau \circ \sigma$, missä J_E on kanoninen kuvaus $E \rightarrow E^{**}$.]

2. kurssikoe: perjantaina 14.5. klo 11.00-14 sali D123. Ottakaa yhteyttä luennoijaan jos aika ei sovi (korvaava koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).
Koealue: Luvut 5-9 (luvusta 9 ei Lax-Milgram sekä operaattorin adjungaatti).

Viimeinen luento keskiviikkona 5.5. klo 12-14, jolloin myös muutama sana koealueesta. Väliajalla noin klo 13 tarjolla kahvia / teetä.

Erilliskokeita mm. ti 11.5. ja ti 18.5. (uusi koemahdollisuus).