Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 12
29.4. 2010

1. Etsi epäjatkuva kuvaus $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, jonka kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\}$$

on suljettu tasossa $\mathbf{R}^2$.

2. Olkoon $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$ välin $[0,1]$ kaikki rationaalipisteet. Asetetaan

$$x^*(f) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{-k} f(q_k), \quad \text{kun } f \in C(0,1),$$

Näytä, että $x^* \in C(0,1)^*$ ja laske normi $\|x^*\|$.

3. Olkoon E Banachin avaruus ja $M, N \subset E$ aliavaruuksia, joille $E = M \oplus N$ (siis $E = M + N$ ja $M \cap N = \{0\}$). Osoita, että lineaarinen projektio $P : E \to E$,

$$Px = m, \quad \text{kun} \quad x = m + n \in M \oplus N = E,$$

on jatkuva jos ja vain jos M ja N ovat E:n suljettuja aliavaruuksia. [*Vihje:* jos M ja N ovat suljettuja, päättele että P on jatkuva suljetun kuvaajan lauseen avulla.]

4. Näytä, että duaaliavaruus $c_0^* = \ell^1$. [*Vihje:* Vrt. Esimerkki 9.3 ja HT 10:4.]

5. Olkoon E Banachin avaruus ja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ jono. Sarja $\sum_n x_n$ on *heikosti ehdottomasti Cauchy* avaruudessa E jos $\sum_n |x^*(x_n)| < \infty$ kaikilla $x^* \in E^*$. Näytä, että tällöin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| \le C\|x^*\| \quad \text{kaikilla } x^* \in E^*.$$

[*Ohje:* Tarkista että lineaarikuvauksella $T : E^* \to \ell^1$, $Tx^* = (x^*(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, on suljettu kuvaaja.]

2. kurssikoe: **perjantaina 14.5. klo 11.00-14 salissa D122**. Erilliskokeita ti 11.5 sekä ti 18.5 (uusi koemahdollisuus), sekä myöhemmin vuoden 2010 aikana pyydettäessä.

Viimeiset luennot ma 3.5 ja ke 5.5, sekä viimeinen harjoitus to 6.5. Ke 5.5 muutama sana koealueesta.