Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 11
22.4. 2010

1. Olkoon E ja F normiavaruuksia, sekä $T : E \to F$ avoin lineaarikuvaus. Näytä, että T on surjektio.

2. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $S \in \mathcal{L}(H)$ sellainen lineaarikuvaus, että

$$|(Sx|x)| \geq c\|x\|^2, \quad x \in H,$$

missä vakio $c > 0$. Näytä, että S on kääntyvä operaattori, ja $\|S^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$. [*Muistutus:* surjektiivisuutta varten tutki vektoreita $x \in Im(S)^{\perp}$.]

3. Olkoon E ja F Banachin avaruuksia ja $A : E \to F$ sellainen jatkuva lineaarikuvaus, että kaikilla $y \in F$ on olemassa yksikäsitteinen vektori $x \in E$, jolle $Ax = y$. Näytä, että kuvaus $y \mapsto x$ märittelee jatkuvan lineaarikuvauksen $S : F \to E$, jolle $A(Sy) = y$ kun $y \in F$. [*Vihje:* avoimen kuvauksen lause tai suljetun kuvaajan lause.]

4. Olkoon E normiavaruus ja $M \subset E$ äärellisulotteinen vektoriavaruus. Näytä, että M on suljettu avaruudessa E. [*Idea:* olkoon $(x_1, \dots, x_n)$ aliavaruuden M normitettu lineaarinen kanta, sekä $(e_1, \dots, e_n)$ tavallinen koordinaattikanta avaruudessa $\mathbf{K}^n$. Määritellään lineaarikuvaus $T : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_1) \to M$:

$$T(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \quad \text{kun } (c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{K}^n.$$

Tällöin T on isomorfismi $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_1) \to M$. Käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva, koska $\{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{K}^n : \sum_{k=1}^{n} |c_k| = 1\}$ on kompakti joukko (Heine-Borel).]

5. Osoita, että ℓ^1 on *laiha* joukko avaruudessa ℓ^2, eli

$$\ell^1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

missä $int(\overline{D_n}) = \emptyset$, eli sulkeumilla $\overline{D_n}$ ei ole sisäpisteitä avaruudessa ℓ^2 kun $n \in \mathbf{N}$. [*Apu*: osoita, että $B_{\ell^1} \subset \ell^2$ on suljettu joukko, jolta puuttuu sisäpisteitä. LDK:n diskreetti versio sarjoille on tässä hyödyllinen.]

Lisätieto: tavoitteena on järjestää 2. kurssikoe joko keskiviikkona 12.5. tai perjantaina 14.5.