Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 10
15.4. 2010

1. Olkoon $T : \ell^2 \to \ell^2$ lineaarikuvaus $Tx = (\frac{k}{k+1} x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, kun $x = (x_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell^2$. Tutki, onko olemassa vektori $x \in \ell^2$ jolle $\|x\|_2 = 1$ ja $\|Tx\|_2 = \|T\|$.

2. Olkoon E Banachin avaruus, ja $T \in \mathcal{L}(E)$ operaattori, jolle $\|T\| < 1$. Johda Neumannin sarjasta lähtien virhearvio

$$\|(I+T)^{-1} - I + T\| \le \frac{\|T\|^2}{1 - \|T\|}.$$

3. Olkoon E, F ja G Banach avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \to G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_1(y) : x \mapsto A(x,y)$ ja $A_2(x) : y \mapsto A(x,y)$ ovat lineaarisia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. Osoita, että bilineaarinen kuvaus A on *rajoitettu*, eli

$$\sup\{\|A(x,y)\| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\} < \infty,$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_2(x) : F \to G$ ja $A_1(y) : E \to G$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in E$ ja $y \in F$. [*Taikasana:* tasaisen rajoituksen periaate].

4. Olkoon $(a_k) \subset \mathbf{R}$ sellainen annettu jono, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{suppenee kaikilla jonoilla } (x_k) \in c_0.$$

Näytä, että $(a_k) \in \ell^1$. [*Vihje.* Argumentoi Esimerkin 7.7 tavoin Banach-Steinhausin lausetta käyttäen.]

5. (*Osgoodin tasaisen rajoituksen periaate*, 1897) Olkoon $(f_n) \subset C(0,1)$ jono jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbf{R}$, jotka ovat *pisteittäin rajoitettuja*, eli $M(x) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |f(x)| < \infty$ kaikilla $x \in [0,1]$. Osoita, että on olemassa avoin väli $(a,b) \subset [0,1]$ ja luku $M < \infty$, siten että $|f_n(x)| \le M$ kaikilla $x \in (a,b)$ ja $n \in \mathbf{N}$. [*Vihje.* Imitoi Banach-Steinhausin lauseen todistusta.]