Funktionaalianalyysin peruskurssi
Harjoitus 1
28.1. 2010

Laskuharjoitukset torstaisin klo 10 - 12 salissa B322.

1. (a) Olkoon $f_n(t) = t^n$ kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbf{N}$. Suppeneeko jono (f_n) jatkuvien funktioiden avaruudessa $(C(0,1), \|\cdot\|_\infty)$?

(b) Olkoon $g_n(t) = n(e^{t/n} - 1)$ ja $g(t) = t$ kun $t \in [0,1]$ ja $n \in \mathbb{N}$. Näytä, että $\|g_n - g\|_\infty \to 0$ kun $n \to \infty$. [*Vihje:* tutki esimerkiksi erotusfunktion ääriarvoja.]

2. Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus skalaarikuntana $\mathbf{K}$. Näytä, että kuvaukset $(x,y) \mapsto x + y : E \times E \to E$ ja $(\lambda, x) \mapsto \lambda x : \mathbf{K} \times E \to E$ ovat jatkuvia. [*Muistutus:* Riittää esimerkiksi näyttää että $x_n + y_n \to x + y$ kun $n \to \infty$ kaikilla jonoilla $(x_n), (y_n) \subset E$ joille $x_n \to x$ ja $y_n \to y$ E:ssä kun $n \to \infty$, ja vastaavasti toisen kuvauksen tapauksessa.]

3. (a) Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ normeja vektoriavaruudessa E. Näytä, että $\|x\| = \max\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$, $x \in E$, määrittelee normin avaruudessa E.

(b) Anna esimerkki sellaisista tason $\mathbf{R}^2$ normeista $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$, joille $\|x\| = \min\{\|x\|_1, \|x\|_2\}$, $x \in \mathbb{R}^2$, ei ole normi tasossa.

4. Olkoon E normiavaruus, $U \subset E$ avoin joukko ja $A \subset E$ mielivaltainen osajoukko. Näytä, että summajoukko $U + A = \{x + a : x \in U, a \in A\}$ on avoin E:ssä. [*Ohje:* Verifioi ensin, että kuvaus $x \mapsto x + a$ on homeomorfismi $E \to E$ kaikilla vektoreilla $a \in E$.

5. Näytä, että $c_0 = \{(x_n) \in \ell^\infty : \lim_n x_n = 0\}$ on avaruuden ℓ^∞ suljettu vektorialiavaruus sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ suhteen, ja että $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ on separoituva. [*Vihje:* Totea, että finiittisten jonojen joukko $c_{00} = \{(x_n) : x_n \neq 0$ äärellisen monella $n\}$ on numeroituva ja tiheä c_0:ssa.]

Funktionaalianalyysin peruskurssin voi suorittaa joko kahdella kurssikokeella (ajat sovitaan myöhemmin) tai erilliskokeella.

Lisäpisteitä suoritetuista laskuharjoitustehtävistä: 20% +1 p, 30% +2 p, 40% +3 p, 50% +4 p, 60% +5 p, 70% +6 p. Lisäpisteet lisätään kurssikokeiden tai erilliskokeen pistesummalle.