**Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 3, 25.9.2008**

1. Olkoon lainan määrä $L$ ja laina-aika $n$. Laina maksetaan jatkuvalla kassavirralla intensiteettinä $b$. Oletetaan, että $b$ ja korkoutuvuus $\delta$ ovat jatkuvia funktioita välillä $[0, n]$. Olkoon $L(t)$ lainan määrä hetkellä $t$. Osoita lähtien differentiaaliyhtälöstä

$$L'(t) = \delta(t)L(t) - b(t), \quad \forall t \in (0, n),$$

että

$$L = \int_0^n e^{-\int_0^s \delta(w)dw} b(s)ds.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\begin{aligned} L(t) &= Le^{\int_0^t \delta(s)ds} - \int_0^t e^{\int_s^t \delta(w)dw} b(s)ds \\ &= \int_t^n e^{-\int_t^s \delta(w)dw} b(s)ds. \end{aligned}$$

3. Olkoon korkutuvuus positiivinen vakio $\delta$, lainan määrä $L$ ja laina-aika $n$. Konstruoi sellainen jatkuva kassavirta, että jäljellä oleva lainan määrä on

$$L(t) = L - \frac{tL}{n}$$

kaikilla $t \in [0, n]$.

4. Korkomallissa hetkellä nolla tehtävä talletus $C$ kasvaa korkoa siten, että hetkellä $t \in (0, 2)$ on nostettavissa määrä

$$C(t) = \begin{cases} Ce^{\delta_0 t + at^2/2}, & \text{kun } t \in [0, 1) \\ Ce^{\delta_0 t + a/2 + a(t-1)^2/2}, & \text{kun } t \in [1, 2). \end{cases}$$

missä $\delta_0$ ja $a$ ovat positiivisia vakioita. Määrää sellainen korkoutuvuus, että vaatimus toteutuu.

5. Lainanantaja vaatii vuoden mittaiselle lainalle ajalle $[k-1, k)$ vuosikoron $i_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Olkoon lainan määrä $L$, laina-aika $n \in \mathbb{N}$ ja lainan takaisinmaksuohjelma $B(1), \ldots, B(n)$. Laina nostetaan hetkellä 0. Osoita, että vaatimus toteutuu ja laina tulee maksettua takaisin, jos

$$L = \sum_{j=1}^{n} (1 + i_1)^{-1} \cdots (1 + i_j)^{-1} B(j).$$