Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 9

Kaikissa tehtävissä oletetaan, että $\mathcal{L}$ on numeroituva.

1. Olkoot $A \subset M$, $\bar{a}, \bar{b} \in M$ s.e. $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ on isoloitu. Osoita, että $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A, \bar{b})$ on isoloitu.

   Kun tämä tulos yhdistetään lemmoihin 4.2.9 ja 4.2.21 saadaan, että $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}, \bar{b}/A)$ on isoloitu jos ja vain jos $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A, \bar{b})$ ja $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$ ovat isoloituja.

2. Osoita, että päätepisteettömien tiheiden lineaarijärjestysten teoria DLO ei ole κ-stabiili millään äärettömällä κ.

3. Olkoon $\eta = (\mathbb{Q}, <')$ ja olkoon $(I, <'')$ jokin lineaarijärjestys. Määritellään struktuuri $((\eta_i)_{i \in I} <)$ s.e. sen universumi koostuu η:n erillisistä kopioista ja kaikilla $x \in \eta_i$, $y \in \eta_j$,

$$x < y \text{ joss joko } i <'' j \text{ tai } i = j \text{ ja } x <' y.$$

   Osoita, että kyseinen struktuuri on $\aleph_0$-homogeeninen.

4. Oletetaan, että $A \subset M$, $|A| \leq \aleph_0$, $\mathcal{M}_0$ ja $\mathcal{M}_1$ ovat $\mathcal{M}$:n elementaarisia alimalleja, jotka ovat alkumalleja A:n suhteen. Osoita, että $\mathcal{M}_0$ ja $\mathcal{M}_1$ ovat isomorfiset yli A:n (eli on olemassa isomorfismi $f : \mathcal{M}_0 \to \mathcal{M}_1$, jolla $f \restriction A = id$).

5. Osoita, että $\aleph_0$-homogeenisten mallien elementaarisen ketjun yhdiste on $\aleph_0$-homogeeninen.

6. Osoita, että $\mathcal{L}$-struktuuri $\mathcal{A}$ on $\aleph_0$-saturoitu jos ja vain jos seuraava ehto pätee: Jos $\mathcal{B}$ on $\mathcal{L}$-struktuuri, $\bar{a} \in A^n$, $\bar{b} \in B^n$, $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b})$ ja $d \in B$, niin on olemassa $c \in A$, jolla $(\mathcal{A}, \bar{a}, c) \equiv (\mathcal{B}, \bar{b}, d)$.