Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 8

1. Tarkastellaan struktuuria $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, 0, +, 1, \cdot)$. Olkoon $\varphi_n(x)$ kaava, joka ilmaisee "x on jaollinen n:llä". Olkoon P alkulukujen joukko. Kun $s \subset P$, määritellään
$$p_s(x) = \{\varphi_n(x) : n \in s\} \cup \{\neg\varphi_n(x) : n \in P \backslash s\}.$$
Osoita, että $p_s(x)$ on $Th((\mathbb{N}, 0, +, 1, \cdot))$:n isoloitu tyyppi jos ja vain jos $s \subset P$ on äärellinen tai $s = P$.

2. Olkoon $\mathcal{L}$ numeroituva ja olkoot $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ atomisia $\mathcal{L}$-struktuureja. Osoita, että $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat edes-takais-ekvivalentit (eli on olemassa epätyhjä $P \subseteq Part(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jolla
   - kaikilla $f \in P$ ja kaikilla $a \in A$ on olemssa $g \in P$ jolla $f \subseteq g$ ja $a \in \mathrm{dom}(g)$,
   - kaikilla $f \in P$ ja kaikilla $b \in B$ on olemssa $g \in P$ jolla $f \subseteq g$ ja $b \in \mathrm{rng}(g)$).

   Päättele edelleen, että kaksi saman numeroituvan aakkoston täydellisen teorian alkumallia ovat isomorfiset.

3. Olkoon $T = Th((\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1))$. Osoita, että teorialla T on alkumalli, mutta $|S_n(T)| = 2^{\aleph_0}$.

4. Olkoon T $(\mathbb{Z}, s)$:n teoria, missä $s(x) = x+1$. Määritä $S_n(T)$:n tyypit kaikilla n. Mitkä ovat isoloituja? Tee sama $(\mathbb{Z}, <, s)$:lle.

5. Olkoon $A \subseteq B$ ja $\theta(\bar{v})$ kaava, jonka parametrit ovat joukossa A. Osoita, että jos θ isoloi $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/B)$:n, niin θ isoloi $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A)$:n.

6. $\mathcal{M} \models T$ on *minimaalinen*, jos $\mathcal{M}$:llä ei ole aitoja elementaarisia alimalleja. Olkoon T numeroituvan aakkoston teoria, jolla on ei-minimaalinen alkumalli $\mathcal{M}$.
   (1) Osoita, että on olemassa elementaarinen upotus $j : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ s.e. $j(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.
   (2) Osoita 1)-kohdan avulla, että on olmassa $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$, jolla $\mathcal{N} \cong \mathcal{M}$ mutta $N \neq M$.
   (3) Osoita, että jos $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2 \ldots$ ja kaikilla $i < \omega$, $\mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}$, niin $\bigcup \mathcal{M}_i \cong \mathcal{M}$ (vihje: tehtävä 2).
   (4) Konstruoi 2)- ja 3)-kohtien avulla elementaarinen ketju $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \omega_1)$ s.e. $\mathcal{M}_\alpha \cong \mathcal{M}$ kaikilla $\alpha < \omega_1$ ja $M_\alpha \neq M_{\alpha+1}$. Olkoon $\mathcal{M}' = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{M}_\alpha$. Osoita, että $\mathcal{M}'$ on atominen ja $|M'| = \aleph_1$.