Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 7

Huomaa: harjoitukset jatkuvat kääntöpuolella.

1. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-struktuureja ja $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:
   (1) $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.
   (2) Jokaisella äärellisellä jonolla $\bar{a} \in A^{|\bar{a}|}$ ja joukolla $X \subset A$, $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\bar{a}/X) = \mathrm{tp}^{\mathcal{B}}(\bar{a}/X)$.
   (3) Jokaisella $n < \omega$ ja joukolla $X \subset A$, $S_n^{\mathcal{A}}(X) = S_n^{\mathcal{B}}(X)$.

2. Olkoon $\mathcal{A}$ $\{<\}$-struktuuri $(\mathbb{Q}, <)$, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko ja $<$ on tavallinen järjestys. Osoita, että on olemassa tasan kontinumin verran (eli $2^{\aleph_0}$) eri täydellistä tyypiä yli $dom(\mathcal{A})$:n.

3. (1) Olkoon $\mathcal{M} = (X, <)$ tiheä päätepisteetön lineaarijärjestys, $A \subset M$ ja $\bar{b}, \bar{c} \in M^n$ s.e. $b_1 < \cdots < b_n$ ja $c_1 < \cdots < c_n$. Osoita, että $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) = \mathrm{tp}^{M}(\bar{c}/A)$ jos ja vain jos $b_i < a \Leftrightarrow c_i < a$ ja $b_i > a \Leftrightarrow c_i > a$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$ ja $a \in A$. Erityisesti, osoita, että kaikilla X:n alkioilla on sama 1-tyyppi yli tyhjän joukon.
   (2) Osoita, että jos $a, b \in \mathbb{Q}$, niin $\mathrm{tp}^{\mathbb{Q}}(a/\mathbb{N}) = \mathrm{tp}^{\mathbb{Q}}(b/\mathbb{N})$ jos ja vain jos on olemassa $\mathbb{Q}$:n automorfismi σ, joka kiinnittää $\mathbb{N}$:n pisteittäin ja jolla $\sigma(a) = b$.
   (3) Olkoon $A = \{1 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{2 + \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$. Osoita, että 1 ja 2 toteuttavat saman tyypin yli A:n, muttei ole olemassa $\mathbb{Q}$:n automorfismia, joka kiinnittäisi A:n pisteittäin ja kuvaisi 1:n 2:ksi.

4. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-struktuureja, $A \subseteq M$ ja $f : A \to \mathcal{N}$ osittainen elementaarinen kuvaus. Osoita, että $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ ja $S_n^{\mathcal{N}}(f(A))$ ovat homeomorfiset.

5. Olkoon $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-struktuuri ja $A \subset M$. Määritellään A:n määriteltävä sulkeuma (definable closure)

$$\mathrm{dcl}(A) = \{x \in M : x \text{ on määriteltävä yli } A\text{:n}\}.$$

Osoita, että jos $\bar{a}, \bar{b} \in M^n$ ja $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$, niin $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{a}/\,\mathrm{dcl}(A)) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/\,\mathrm{dcl}(A))$.

6. Olkoon Δ joukko $\mathcal{L}$-kaavoja, joka on suljettu konnektiivien $\wedge, \vee$ ja $\neg$ suhteen. Olkoon $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-struktuuri. Määritellään

$$
\begin{aligned}
S_n^\Delta(T) = \{\Sigma \subset \Delta : \quad & \Sigma\text{:n kaavojen vapaat muuttujat ovat } v_1, \ldots, v_n, \\
& \Sigma \cup T \text{ on toteutuva}, \\
& \varphi \in \Sigma \text{ tai } \neg\varphi \in \Sigma \text{ kaikilla } \varphi \in \Delta\}.
\end{aligned}
$$

(1) Osoita, että kaikilla $p \in S_n^\Delta(T)$ on olemassa $q \in S_n(T)$ s.e. $p \subseteq q$.

(2) Oletetaan, että kaikilla n ja $p \in S_n^\Delta(T)$ on olemassa yksikäsitteinen $q \in S_n(T)$, jolla $p \subseteq q$. Osoita, että kaikilla $\mathcal{L}$-kaavoilla $\varphi(\bar{v})$ on olemassa $\psi(\bar{v}) \in \Delta$ s.e. $T \models \varphi(\bar{v}) \leftrightarrow \psi(\bar{v})$. Erityisesti, jos jokaisella kvanttorivapaalla tyypillä on yksikäsitteinen laajennus täydelliseksi tyypiksi, niin T sallii kvanttoreiden eliminoinnin.