Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 6

Huomaa: harjoitukset jatkuvat kääntöpuolella.

1. Olkoon $\mathcal{L} = \{E\}$, missä E on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Olkoon T teoria, jonka malleissa
   (1) E:llä on äärettömän monta ekvivalenssiluokkaa ja kaikkien koko on 2.
   (2) E:llä on äärettömän monta ekvivalenssiluokkaa ja kaikki ovat äärettömiä.
   (3) E:llä on äärettömän monta ekvivalenssiluokkaa, joiden koko on 2, äärettömän monta ekvivalenssiluokkaa, joiden koko on 3, ja jokaisen ekvivalenssiluokan koko on 2 tai 3.
   (4) E:llä on yksi kokoa n oleva ekvivalenssiluokka jokaisella $n < \omega$.

   Osoita, että T sallii kvanttoreiden eliminoinnin tai anna esimerkki, joka osoittaa, ettei teoria salli kvanttoreiden eliminointia, ja luonnollinen $\mathcal{L}' \supset \mathcal{L}$, jossa teorialla on kvanttoreiden eliminointi.

2. Olkoon $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-struktuuri ja $A \subseteq M$. Alkio $b \in M$ on *algebrallinen yli A:n* jos on olemassa $\mathcal{L}$-kaava $\varphi(v, \bar{w})$ ja $\bar{a} \in A$ s.e. $\mathcal{M} \models \varphi(b, \bar{a})$ ja $\{y \in M : \mathcal{M} \models \varphi(y, \bar{a})\}$ on äärellinen. Määritellään algebrallinen sulkeuma $\mathrm{acl}(A) = \{x \in M : x \text{ on algebrallinen yli } A\text{:n}\}$.
   (1) Oletetaan, että $x \in \mathrm{acl}(A)$. Osoita, että on olemassa $x_1, \ldots, x_m$ s.e. jos σ on $\mathcal{M}$:n automorfismi ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in A$, niin $\sigma(x) = x_i$ jollakin i.
   (2) Osoita, että $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.
   (3) Osoita, että jos $x \in \mathrm{acl}(A)$, niin $x \in \mathrm{acl}(A_0)$ jollakin äärellisellä $A_0 \subseteq A$.
   (4) Osoita, että jos $A \subseteq B$, niin $\mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$.

3. (1) Osoita, että $(\mathbb{Z}, s)$:n teorialla on kvanttoreiden eliminointi, kun $s(x) = x + 1$. Osoita, että teoria on vahvasti minimaalinen (eli jokaisessa teorian mallissa $\mathcal{M}$ jokainen määriteltävä M:n osajoukko on äärellinen tai sen komplementti on äärellinen) ja että $\mathrm{acl}(A)$ on niiden alkioiden joukko, jotka ovat "saavutettavissa" A:sta.
   (2) Osoita, että $(\mathbb{N}, s)$:n teorialla ei ole kvanttoreiden eliminointia.

4. Osoita, että $(\mathbb{N}, <)$:n teoria sallii kvanttoreiden eliminoinnin aakkostossa, johon on lisätty funktiosymboli kuvaukselle $s(x) = x + 1$ ja vakiosymboli 0:lle. Osoita, että jokainen määriteltävä $X \subseteq \mathbb{N}$ on joko

äärellinen tai koäärellinen (eli komplementti on äärelline), mutta että $(\mathbb{N}, <)$:n teoria ei ole vahvasti minimaalinen.

5. (1) Osoita, että jos $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ovat T:n malleja ja $\mathcal{M}$ on eksistentiaalisesti suljettu (ks. HT 5.1), niin on olemassa $\mathcal{M}_1 \models T$ s.e. $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{M}_1$.
   (2) Osoita, että T on mallitäydellinen jos ja vain jos jokainen T:n malli on eksistentiaalisesti suljettu. (Vihje: $(\Leftarrow)$ Oletetaan, että $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{N}_0$ ovat T:n malleja. Rakenna edellisen kohdan avulla ketju T:n malleja $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{N}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}_1 \subseteq \mathcal{M}_2 \subseteq \ldots$ s.e. $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}_{i+1}$ ja $\mathcal{N}_i \preccurlyeq \mathcal{N}_{i+1}$.
6. Osoita, että T on mallitäydellinen jos ja vain jos jokaisella kaavalla $\varphi(\bar{v})$ on olemassa kvanttorivapaa kaava $\psi(\bar{v}, \bar{w})$ s.e $T \models \varphi(\bar{v}) \leftrightarrow \exists \bar{w} \psi(\bar{v}, \bar{w})$. (Vihje: mieti eksistentiaalisten kaavojen säilymistä.)