Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 5

Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria. Teoria T' *aksiomatisoi* T:n jos $\mathcal{M} \models T \Leftrightarrow \mathcal{M} \models T'$ kaikilla $\mathcal{L}$-struktuureilla $\mathcal{M}$. *Universaali lause* on muotoa $\forall \bar{v} \varphi(\bar{v})$ oleva lause, missä φ on kvanttorivapaa. $\mathcal{L}$-teorialla T on *universaali aksiomatisointi*, jos on olemassa joukko universaaleja $\mathcal{L}$-lauseita, jotka aksiomatisoivat T:n. Vastaavasti T on $\forall\exists$-*aksiomatisoituva*, jos se on aksiomatisoitavissa muotoa $\forall \bar{v} \exists \bar{w} \varphi(\bar{v}, \bar{w})$ olevilla lauseilla, missä φ on kvanttorivapaa.

1. $\mathcal{M} \models T$ on *eksistentiaalisesti suljettu*, jos aina kun $\mathcal{N} \models T$, $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ ja $\mathcal{N} \models \exists \bar{v} \varphi(\bar{v}, \bar{a})$, missä $\bar{a} \in M$ ja φ on kvanttorivapaa, niin $\mathcal{M} \models \exists \bar{v} \varphi(\bar{v}, \bar{a})$.

   Osoita, että jos T on $\forall\exists$-aksiomatisoituva, niin T:llä on eksistentiaalisesti suljettu malli. Lisäksi, jos $\mathcal{M} \models T$, olemassa $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{N} \models T$, joka on eksistentiaalisesti suljettu ja toteuttaa $|N| = |M| + |\mathcal{L}| + \aleph_0$. (Vihje: Osoita ensin, että $\forall\exists$-kaavat säilyvät ketjujen yhdisteissä.)

2. Oletetaan, että T:llä on (sisäänrakennetut) Skolem-funktiot. Osoita, että T:llä on universaali aksiomatisointi. Vihje: Osoita ensin, että teorialla on universaali aksiomatisointi jos ja vain jos teoria säilyy alimalleissa (eli $\mathcal{M} \models T$ ja $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ implikoivat $N \models T$).

3. Konstruoi edes-taikainen joukko $\mathcal{A}$:lle ja $\mathcal{B}$:lle, kun
   - $\mathcal{L} = \emptyset$ ja A ja B ovat äärettömät.
   - $\mathcal{L} = \{<\}$ ja $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ovat tiheitä päätepisteettömiä lineaarijärjestyksiä.

4. Olkoon $\mathcal{L} = \{F\}$, missä F on yksipaikkainen funktiosymboli. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-struktuureja, missä $\mathrm{dom}(\mathcal{A}) = \mathbb{N}$, $\mathrm{dom}(\mathcal{B}) = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$ ja molemmissa struktuureissa määritellään F s.e. se kuvaa k:n $k+1$:lle jokaisella universumin alkiolla k. Mikä on pienin n, jolla I:llä on voittostrategia pelissä $EF_n(\mathcal{A}, \mathcal{B})$?

5. Peli $P_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ määritellään muuten kuten $EF_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, mutta pelaaja I:n siirrot ovat kaikki mallin $\mathcal{A}$ universumissa. Osoita, että jos $\mathrm{dom}(\mathcal{A})$ on (äärellinen tai) numeroituva, niin II:lla on voittostrategia pelissä $P_\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ jos ja vain jos on olemassa upotus $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

6. Olkoot $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ lineaarijärjestyksiä, joista toinen on hyvinjärjestys. Osoita, että jos $\mathcal{A}$:lle ja $\mathcal{B}$:lle on olemassa edes-takais-joukko, niin mallit ovat isomorfiset.