Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 4

1. Olkoot $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}^+$ aakkostoja, $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-struktuuri, $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}^+$-struktuuri ja $f : \mathcal{B} \restriction \mathcal{L} \to \mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-isomorfismi. Osoita, että tällöin on olemassa yksikäsitteinen $\mathcal{L}^+$-struktuuri $\mathcal{A}^+$ s.e. $\mathcal{A}^+ \restriction \mathcal{L} = \mathcal{A}$ ja f on $\mathcal{L}^+$-isomorfismi. ($\mathcal{A}^+$:n struktuuri on tällöin f:n *indusoima*.)

2. (Vakioiden lemma) Olkoot $\mathcal{L}$ aakkosto, T $\mathcal{L}$-teoria ja $\varphi(\bar{v})$ $\mathcal{L}$-kaava. Olkoon $\bar{c}$ jono erillisiä muuttujia, jotka eivät kuulu aakkostoon $\mathcal{L}$. Osoita, että
$$T \models \varphi(\bar{c}) \quad \Leftrightarrow \quad T \models \forall \bar{v} \varphi(\bar{v}).$$

3. Teoria T on *mallitäydellinen*, jos jokainen T:n mallien välinen upotus on elementaarinen. Osoita, että jos T:llä on Skolem-funktiot, niin T on mallitäydellinen. Anna esimerkki ensimmäisen kertaluvun teoriasta, joka on mallitäydellinen, mutta jolla ei ole Skolem-funktioita.

4. Osoita, että reaalilukujen kunnan teorialla $Th((\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, -, ^{-1}))$ on olemassa kaksi numeroituvaa keskenään ei-isomorfista mallia.

5. Olkoot $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ aakkostoja ja $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Olkoot vielä $\mathcal{B}$ $\mathcal{L}_1$-struktuuri ja $\mathcal{C}$ $\mathcal{L}_2$-struktuuri ja $\bar{a}$ jono $\mathrm{dom}(\mathcal{B}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{C})$:n alkioita s.e. $(\mathcal{B} \restriction \mathcal{L}, \bar{a}) \equiv (\mathcal{C} \restriction \mathcal{L}, \bar{a})$. Osoita, että tällöin on olemassa $(\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)$-struktuuri $\mathcal{D}$ s.e. $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{D} \restriction \mathcal{L}_1$ ja on olemassa $\mathcal{L}_2$-elementaarinen upotus $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \restriction \mathcal{L}_2$ s.e. $g(\bar{a}) = \bar{a}$.

   Vihje: Huomaa, että muokkaamalla tunnilla todistettua amalgamaatiolausetta, voidaan osoittaa, että on olemassa $\mathcal{L}_1$-struktuuri $\mathcal{B}_1 \succcurlyeq \mathcal{B}$ ja $\mathcal{L}$-elementaarinen upotus $f : \mathcal{C} \to \mathcal{B}_1 \restriction \mathcal{L}$ s.e. $f(\bar{a}) = \bar{a}$. Vastaavasti voidaan löytää sopiva $\mathcal{L}_2$-struktuuri $\mathcal{C}_1 \succcurlyeq \mathcal{C}$. Konstruoi $\mathcal{D}$ kahden toisiinsa uppoavan elementaarisen ketjun avulla (tehtävästä 1 on hyötyä tässä).

6. (1) Olkoot $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}^+$, T $\mathcal{L}^+$-teoria ja $\mathcal{A}$ $\mathcal{L}$-struktuuri. Merkitään $T_{\mathcal{L}} = \{\varphi\, \mathcal{L}\text{-lause} : T \models \varphi\}$. Osoita, että $A \models T_{\mathcal{L}}$ jos ja vain jos on olemassa $\mathcal{L}^+$-struktuuri $\mathcal{B}$ s.e. $\mathcal{B} \models T$ ja $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B} \restriction \mathcal{L}$.
   (2) Olkoot $\mathcal{L}_1$ ja $\mathcal{L}_2$ aakkostoja, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$, T_1 $\mathcal{L}_1$-teoria ja T_2 $\mathcal{L}_2$-teoria s.e. $T_1 \cup T_2$:lla ei ole mallia. Osoita, että tällöin on olemassa $\mathcal{L}$-lause ψ s.e. $T_1 \models \psi$ ja $T_2 \models \neg\psi$.
   (3) Todista *Craigin interpolaatiolause*: Jos θ on $\mathcal{L}_1$-lause, ψ on $\mathcal{L}_2$-lause ja $\theta \models \psi$ (eli kaikille $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$-struktuureille $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \theta \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi$), niin on olemassa $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$-lause χ s.e. $\theta \models \chi$ ja $\chi \models \psi$.