Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 3

1. Järjestetty kunta $(F, +, \cdot, 0, 1, -, ^{-1}, <)$ on *Arkhimedeen* kunta, jos kaikilla positiivisilla alkioilla $a, b \in F$ on olemassa $n \in \mathbb{N}$ s.e. $na \geq b$ (missä na on lyhennysmerkintä ja tarkoittaa a summattuna itsensä kanssa n kertaa). Erityisesti reaalilukujen kunta $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, -, ^{-1}, <)$ on Arkhimedeen kunta. Osoita, että on olemassa järjestetty kunta $(F, +, \cdot, 0, 1, -, ^{-1}, <)$, joka ei ole Arkhimedeen kunta, mutta johon reaalilukujen kunta voidaan elementaaisesti upottaa. Huomaa, että kunnassa on tällöin *infinitesimaaleja*, eli positiivisia alkioita x, joilla $nx < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Infinitesimaaleja käytetään epästandardissa analyysissa, jonka avulla mm. voidaan kehittää jatkuvuus- ja derivoimisteoriaa ilman epsilon-delta-tarkasteluja.)

2. Osoita, että $(\mathbb{R}, <) \not\cong (\mathbb{R}^*, <)$, missä $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Siis DLO ei ole 2^ω-kategorinen.

3. Olkoon $\mathcal{L} = \{<\}$, missä $<$ on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Määritellään $\mathcal{L}$-struktuuri $\mathcal{A}_n$ s.e. $dom(\mathcal{A}_n) = \{-n, -(n-1), \ldots, 0, 1, 2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$ ja $<$ tulkitaan kokonaislukujen järjestykseksi. Osoita, että
   (1) jokaisella n, $\mathcal{A}_n$ on isomorfinen $\mathcal{A}_0$:n kanssa (ja siten $\mathcal{A}_n \equiv \mathcal{A}_0$).
   (2) jos $n > 0$, $\mathcal{A}_0$ on $\mathcal{A}_n$ alimalli, muttei elementaarinen alimalli.

4. Olkoon $\mathcal{L}$ kuten tehtävässä 3. Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria, joka laajentaa lineaarijärjestyksen teoriaa (irrefleksiivisyys, transitiivisuus, lineaarisuus) s.e. T:llä on äärettömiä malleja. Osoita, että on olemassa $\mathcal{L}$-malli $\mathcal{M} \models T$ ja järjestyksen säilyttävä upotus $j : \mathbb{Q} \to \mathcal{M}$.

   Esimerkiksi jos $T = Th((\mathbb{Z}, <))$, niin on olemassa $\mathcal{M} \equiv (\mathbb{Z}, <)$, johon rationaaliluvut voidaan upottaa.

5. Oletetaan, että $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$ ja $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq \mathcal{M}_2$. Osoita, että $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}_1$.

6. Konstruoi mallit $(A, <) \equiv (B, <)$, joilla $(A, <)$ on hyvijärjestetty, mutta $(B, <)$ ei ole.