Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 2

Huomaa: harjoitukset jatkuvat kääntöpuolella.

1. $\mathcal{L}$-lause φ on *universaali*, jos se on muotoa $\forall\bar{v}\psi(\bar{v})$ ja ψ on kvanttorivapaa.

   Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-malleja ja $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ (eli $\mathcal{M}$ on $\mathcal{N}$:n alimalli). Osoita, että jos φ on universaali lause ja $\mathcal{N} \models \varphi$, niin $\mathcal{M} \models \varphi$.

2. Kun $\mathbb{K}$ on $\mathcal{L}$-malliluokka, merkitään

$$Th_{\mathcal{L}}(\mathbb{K}) = \{\varphi : \varphi \text{ on } \mathcal{L}\text{-lause ja } \mathcal{M} \models \varphi \text{ kaikilla } \mathcal{M} \in \mathbb{K}\}.$$

   Kun T on $\mathcal{L}$-teoria, merkitään

$$Mod(T) = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ on } \mathcal{L}\text{-malli ja } \mathcal{M} \models T\}.$$

   Olkoon T $\mathcal{L}$-teoria. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät
   (1) $T = Th_{\mathcal{L}}(Mod(T))$.
   (2) T on muotoa $Th_{\mathcal{L}}(\mathbb{K})$ jollakin $\mathcal{L}$-malliluokalla $\mathbb{K}$.
   (3) T on suljettu loogisten seurausten suhteen, eli jos $T \models \varphi$, niin $\varphi \in T$.

3. Olkoon $\mathcal{L}$ numeroituva aakkosto. Osoita, että kaikilla äärettömillä kardinaaleilla κ on olemassa korkeintaan 2^κ epäisomorfista mahtavuutta κ olevaa $\mathcal{L}$-mallia.

   Oletetaan tunnetuksi: $\kappa^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} \kappa^n = \kappa$ ja $\kappa^\kappa = 2^\kappa$ kaikilla äärettömillä kardinaaleilla κ.

4. Olkoon $\mathcal{M}$ $\mathcal{L}$-malli. Sanotaan, että funktion $f : M^n \to M^m$ on määriteltävä jos f:n kuvaaja on M^{n+m}:n määriteltävä osajoukko.
   (1) Osoita, että jos $f : M^n \to M^m$ ja $g : M^m \to M^l$ ovat määriteltäviä, niin $g \circ f$ on määriteltävä.
   (2) Oletetaan, että $f : M^n \to M$ on määriteltävä. Osoita, että f:n kuvajoukko $Im(f)$ on määriteltävä.
   (3) Oletetaan, että $f : M^n \to M$ on määriteltävä ja injektiivinen. Osoita, että f^{-1} on määriteltävä.

5. Oletetaan $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}$. Jos $\mathcal{M}_1$ on $\mathcal{L}_1$-malli, niin unohtamalla joukon $\mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{L}$ symbolien tulkinnat, saadaan $\mathcal{L}$-malli $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ on tällöin $\mathcal{M}_1$:n *rajoittuma* (reduct) ja $\mathcal{M}_1$ on $\mathcal{M}$:n laajennus (expansion).
   (1) Osoita, että jos $X \subseteq M^n$ on määriteltävä $\mathcal{M}$:ssä, niin se on määriteltävä $\mathcal{M}_1$:ssä.

(2) Anna esimerkki, joka osoittaa, että laajennuksessa määriteltävät joukot eivät aina ole määriteltäviä alkuperäisessä mallissa.

(3) Oletetaan, että $\mathcal{M}_1$ on $\mathcal{M}$:n laajennus, ja että aina, kun f tai R on joukon $\mathcal{L}_1 \backslash \mathcal{L}$ funktio- tai relaatiosymboli, niin $f^{\mathcal{M}_1}$ tai $R^{\mathcal{M}_1}$ on määriteltävä $\mathcal{M}$:ssä. Osoita, että tällöin jokainen $\mathcal{M}_1$:ssä määriteltävä M^n:n osajouko on määriteltävä $\mathcal{M}$:ssä.

6. Olkoon $\mathcal{L}$ aakkosto ja olkoon $\mathbb{K}$ kaikkien äärellisten $\mathcal{L}$-mallien luokka. Osoita, että $\mathbb{K}$ ei ole aksiomatisoituva ensimmäisen kertaluvun logiikassa.