Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 11

1. Olkoon Φ äärellinen $\mathcal{L}$-kaavajoukko ja olkoon $\mathcal{A}$ ääretön $\mathcal{L}$-struktuuri. Osoita, että on olemassa ääretön $X \subset A$ ja lineaarijärjestys $<$ s.e. $(X, <)$ on Φ-erottamaton jono (eli erottamattoman jonon määritelmässä rajoitutaan tarkastelemaan kaavoja $\varphi \in \Phi$).

2. Olkoon T numeroituvan aakkoston täydellinen teoria, jolla on äärettömiä malleja ja olkoon κ ääretön kardinaali. Osoita, että on olemassa sellaiset T:n mallit $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, että $|A| = |B| = \kappa$, $\mathcal{B}$ on $\mathcal{A}$:n aito alimalli ja on olemassa $\mathcal{A}$:n automorfismi f s.e.
$$\mathcal{B} \prec f(\mathcal{B}) \prec f(f(\mathcal{B})) \prec f(f(f(\mathcal{B}))) \prec \dots$$
ja
$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup f(\mathcal{B}) \cup f(f(\mathcal{B})) \cup f(f(f(\mathcal{B}))) \cup \dots .$$

3. Olkoon $\mathcal{L}$ numeroituva aakkosto ja T täydellinen $\mathcal{L}$-teoria, jolla on äärettömiä malleja. Osoita, että T:llä on perhe numeroituvia malleja $\mathcal{A}_S$, $S \subset \omega$, s.e. jos R on S:n aito osajoukko, niin $\mathcal{A}_R$ on $\mathcal{A}_S$:n aito elementaarinen alimalli.

4. Olkoon $\mathcal{L} = \{E\}$, missä E on kaksipaikkainen relaatiosymboli, ja olkoon T teoria, joka ilmaisee, että E on ekvivalenssirelaatio, jolla on äärettömän monta ekvivalenssiluokka, jotka kaikki ovat äärettömiä. Osoita, ettää kaikissa $\mathcal{M} \models T$ on olemassa äärettömät erottamattomat joukot I_0 ja I_1 s.e. $\mathrm{tp}(I_0) \neq \mathrm{tp}(I_1)$, mutta jos J on mikä tahansa ääretön erottamaton joukko, niin $\mathrm{tp}(J) = \mathrm{tp}(I_i)$ jommallakummalla $i \in \{0, 1\}$.

5. Osoita, että jos $\mathcal{M}$ on κ-saturoitu, niin on olemassa erottamaton jono $I \subseteq M$, jolla $|I| = \kappa$.

6. Osoita, että jokaisella numeroituvalla $\mathcal{L}$-struktuurilla $\mathcal{M}$ on olemassa laskeva elementaarinen ketju $(\mathcal{N}_n : n < \omega)$ (eli $\mathcal{N}_{n+1} \prec \mathcal{N}_n$ kaikilla n) s.e. $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}_n$ kaikilla n ja $\mathcal{M} = \bigcap_{n<\omega} \mathcal{N}_n$. Vihje: Valitse $\mathcal{N}_0$ s.e. se on M:n ja sopivan erottamattoman jonon Skolem-sulkeuma.