Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 10

1. Osoita, että jos $\mathcal{M}$ on κ-saturoitu, niin jokaisen äärettömän määriteltävän M^k:n osajoukon mahtavuus on vähintään κ.

2. Olkoon $\kappa \geq \aleph_0$ ja $A \subset M$, $|A| < \kappa$. Olkoon $\mathcal{M}_A$ $\mathcal{L}_A$-struktuuri, jossa $\mathcal{M}$:ään on lisätty luonolliset tulkinnat uusille vakiosymboleille. Osoita, että jos $\mathcal{M}$ on κ-saturoitu, niin $\mathcal{M}_A$ on.

3. Olkoon $\mathcal{L}$ äärellinen aakkosto ilman funktiosymboleita ja olkoon T $\mathcal{L}$-teoria, joka sallii kvanttoreiden eliminoinnin. Osoita, että T on $\aleph_0$-kategorinen.

4. Olkoon $\mathcal{L}$ numeroituva ja T täydellinen $\mathcal{L}$-teoria. Osoita, että jos T on $\aleph_0$-kategorinen, niin homogeeniset mallit ovat saturoituja.

5. Osoita, että teorialla $Th((\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1))$ ei ole numeroituvaa kyllästettyä mallia.

   Vihje: Osoita, että kyllästetyn mallin pitäisi sisältää luku, jonka jokainen $p \in X$ jakaa mutta mikään $p \in P - X$ ei jaa, olipa $X \subseteq$ mikä tahansa joukko.

6. Osoita, että jokainen numeroituvan aakkoston ääretön saturoitu malli on isomorfinen aidon elementaarisen alimallinsa kanssa.