Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Malliteoria syksy 2008
Harjoitus 1

1. Osoita, että $\cong$ on ekvivalenssirelaatio. (Kahdella $\mathcal{L}$-struktuurilla $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, jos on olemassa $\mathcal{L}$-isomorfismi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.)

2. Olkoot $\mathcal{L}_1 = \{0, \leq\}$ and $\mathcal{L}_2 = \{f\}$. Tarkastellaan $\mathcal{L}_1$-mallia $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{L}_2$-mallia $\mathcal{N}$, joissa $dom(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{N}) = 5 = \{0,1,2,3,4\}$. Määritellään $0^{\mathcal{M}} = 0$ ja kaikilla $m, n \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ $(m,n) \in \leq^{\mathcal{M}}$ joss $m \leq n$ sekä kaikilla $n \in \mathrm{dom}(\mathcal{N})$
$$f^{\mathcal{N}}(n) = n \dot{-} 1 = \begin{cases} n-1 & \text{jos } n > 0, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$
Kuinka monta (isomorfiaaa vaille) yhden alkion virittämää alimallia malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{N}$ on ?

3. Olkoon $<$ 2-paikkainen relaatiosymboli. Struktuuri $\mathcal{A} = (A, <^{\mathcal{A}})$ on *lineaarijärjestys*, jos relaatio $<^{\mathcal{A}}$ on irrefleksiivinen, transitiivinen ja lineaarinen (lineaarisuus: kaikille $x, y \in A$ pätee joko $x <^{\mathcal{A}} y$, $y <^{\mathcal{A}} x$ tai $x = y$). Lineaarijärjestys $\mathcal{A}$ on *hyvinjärjestys*, jos lisäksi jokaisella epätyhjällä A:n osajoukolla on $<^{\mathcal{A}}$-pienenin alkio.
Osoita, että lineaarijärjestys $\mathcal{A}$ on hyvinjärjestys, jos ja vain jos *ei* ole olemassa alkioita $a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$, siten että $a_{n+1} <^{\mathcal{A}} a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

4. Olkoon $\mathcal{A} = (A, <^{\mathcal{A}})$ hyvinjärjestys. Alistruktuuri $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ on $\mathcal{A}$:n *alkusegmentti*, jos kaikille $x \in dom(\mathcal{A}_0)$ ja $y <^{\mathcal{A}} x$ pätee $y \in dom(\mathcal{A}_0)$. Alkusegmentti on *aito*, jos $\mathcal{A}_0 \neq \mathcal{A}$.
Olkoon $\mathcal{A}$ hyvinjärjestys. Osoita, että $\mathcal{A}$ ei ole $\{<\}$-isomorfinen minkään aidon alkusegmenttinsä kanssa.
Vihje: Osoita ensin: Jos $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ on järjestysisomorfismi ja $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, niin $a \leq f(a)$ kaikilla $a \in dom(\mathcal{B})$. Tee vastaoletus ja tarkastele joukon $dom(\mathcal{A}) \setminus dom(\mathcal{B})$ pienintä alkiota.

5. Joukot A ja B ovat *yhtämahtavat*, merk. $A \approx B$, jos on olemassa bijektio $f : A \to B$. Osoita, että $A \not\approx \mathcal{P}(A)$.

6. Kardinaali κ on *singulaarinen*, jos $\kappa = \bigcup_{i \in I} X_i$, missä $|I| < \kappa$ ja $|X_i| < \kappa$ kaikilla $i \in I$. Muuten κ on säännöllinen. Osoita, että seuraajakardinaalit ovat säännöllisiä. (Seuraajakardinaali κ^+ on pienin kardinaali, joka on aidosti suurempi kuin κ. Oletetaan tunnetuksi, että $\lambda \cdot \kappa = \max\{\lambda, \kappa\}$, kun $\kappa, \lambda \geq \aleph_0$.)