Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 8, kevät 2009

Seuraavissa harjoituksissa $X = L^2([a,b])$ varustettuna sisätulolla

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

1. Todista *Pythagoraan lause* sisätuloavaruudessa X: oletetan, että $f \in X$ ja $f = g + h$, missä g ja h ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, Osoita, että
$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2.$$

2. Olkoon $f \in X$, ja $(v_i)_{i=1}^N$ äärellinen ortonormaali jono. Olkoon $f_n = (f, v_n)$, ja
$$u_N = \sum_{n=1}^N f_n v_n.$$
Olkoon $w = f - u_N$. Osoita, että w ja u_N ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

3. Samoin merkinnöin, osoita että kaikilla $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pätee
$$\|f - \sum_{n=1}^N f_n v_n\| \le \|f - \sum_{n=1}^N \lambda_n v_n\|,$$
eli $\sum_{n=1}^N f_n v_n$ on paras aproksimaatio f:lle vektorien v_i, $i = 1, \ldots, N$, virittämästä aliavaruudesta.

4. Olkoon $(v_i)_{i=1}^\infty$ mielivaltainen ortonormaali jono. Osoita, että edellisen tehtävän merkinnöin sarja
$$\sum_{n=1}^\infty f_n v_n$$
suppenee, ja sen summalle v pätee Besselin epäyhtälö
$$\|v\| \le \|f\|.$$

5. Edelleen samoin merkinnöin, osoita että $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Tämän voi tiivistää sanomalla, että L^2–funktion Fourier–kertoimet konvergoivat kohti nollaa.

6. Oletetaan, että ortonormaalin jonon v_i kaikkien äärellisten lineaarikombinaatioiden joukko S on tiheä X:ssä, eli jokaisella $f \in X$ ja $\varepsilon > 0$ on olemassa $v \in S$ siten että $\|v - f\| < \varepsilon$. Osoita, että Besselin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus, eli

$$\|\sum_{n=1}^{\infty} f_n v_n\| \leq \|f\|,$$

missä siis $f_n = (f, v_n)$.