Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 6, kevät 2009

1. Olkoon $f(x) = (\pi - |x|)^2$, $|x| \leq \pi$.. Määrää f: n Fourier–sarja.
2. Edellistä tehtävää käyttäen laske sarjan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
summa.
3. Olkoon D_N luennoilla määritelty Dirichlet'n ydin. Olkoon edelleen
$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} D_n(x).$$
Osoita, että
$$K_N(x) = \frac{1 - \cos((N+1)x)}{(N+1)(1 - \cos x)}.$$
4. Okooon K_N kuten yllä. Osoita, että $K_N(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [-\pi, \pi]$, ja että
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\, dx = 2\pi.$$
Edelleen, osoita, että
$$K_N(x) \leq \frac{2}{(N+1)(1 - \cos\delta)}, \text{ jos } 0 < \delta \leq |x| \leq \pi.$$
5. Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ jatkuva, 2π–periodinen funktio. Olkoon kuten luennoilla
$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx},$$
ja määritellään aritmeettinen keskiarvo
$$\sigma_N(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_N(x)}{N+1}.$$
Osoita, että
$$\sigma_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t)\, dt.$$
6. Edellistä tehtävää käyttäen osoita ns *Fejérin lause*: Kun $N \to \infty$, niin $\sigma_N(x) \to f(x)$ tasaisesti välillä $[-\pi, \pi]$.