Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 5, kevät 2009

1. Ratkaise ongelma

$$u_{tt} - 4u_{xx} = e^x + \sin t, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = (1+x^2)^{-1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Määrää alkuarvo–ongelman

$$u_{ttx} - u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u_x(x,0) = 0,\ u_{xt}\ (x,0) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

   yleinen ratkaisu.

3. Ratkaise ns. *Darboux:n ongelma*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad t > \max\{-x, x\},\ t > 0,$$
$$u(x,t) = \phi_\pm(t), \quad x = \pm t,\ t \geq 0,$$

   missä funktiot ϕ_+ ja $\phi_- \in C^2([0,\infty))$ toteuttavat yhteensopivuusehdon $\phi_+(0) = \phi_-(0) = 0$.

4. Onko edellisen tehtävän ongelma hyvin asetettu?

5. Ratkaise reuna–alkuarvo–ongelma

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty,\ t > 0,$$
$$u(0,t) = t(1+t)^{-1},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ x \geq 0.$$

   Mitä huomaat raja–arvosta

$$\lim_{x\to\infty} u(cx, x)?$$

6. Määrää yhtälön

$$u_t = iku_{xx}$$

   muotoa

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

   olevat ratkaisut; tässä $k > 0$ on vakio.