Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 4, kevät 2009

1. Tarkastellaan Cauchy–ongelmaa

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = (1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x), \quad u_t(x,0) = 4\chi_{[1,2]}(x),$$

missä $\chi_{[a,b]}$ on välin $[a,b]$ karakteristinen funktio. Määrää ongelman heikko ratkaisu, ja laske raja–arvo $\lim_{t\to\infty} u(5,t)$.

2. Määrää kaikki ne pisteet, missä edellisen tehtävän ratkaisu u ei ole klassinen ratkaisu. Onko ratkaisulla epäjatkuvuuskohtia? Jos on, niin määrää nekin.

3. Olkoon u Cauchy–ongelman

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ratkaisu. Osoita, että jos f ja g ovat parittomia funktioita, niin myös u on pariton funktio muutujan x suhteen.

4. Tarkastellaan seuraavaa *reuna–alkuarvo–ongelmaa* aaltoyhtälölle:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = t^2, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad x \geq 0.$$

Huomaa, että nyt etsimme ratkaisua vain kun $x \geq 0$, ja oletamme ajasta riippuvan *reunaehdon* reunapisteessä $x = 0$. Oletetaan, että alkuehdot $f \in C^2([0,\infty))$ ja $g \in C^2([0,\infty))$ toteuttavat *yhteensopivuusehdot*

$$f(0) = f'(0) = g(0) = 0.$$

Konstruoi ratkaisu tälle ongelmalle. **Vihje**: Jatka f ja g parittomiksi funktioiksi koko reaaliakselille, ja ratkaise Cauchy–ongelma näillä alkuarvoilla käyttäen D'Alembertin kaavaa. Osoita edellistä tehtävää käytäen, että tämän ratkaisun rajoittuma joukkoon $x \geq 0$, $t > 0$ on haettu ratkaisu.

5. Ratkaise ns. *epähomogeeninen* Cauchy–ongelma

$$u_{tt} - u_{xx} = 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vihje: Palauta tämä tavalliseen Cauchy–ongelmaan lisäämällä u:hun sopiva x:n funktio, ja ratkaise tämä.

6. Räjähdyksen synnyttämä paineaalto P toteuttaa aaltoyhtälön

$$P_{tt} - 16P_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Räjähdyshetkellä $t = 0$ paineaalto toteuttaa ehdot

$$P(x,0) = 10\chi_{[-1,1]}, \quad P_t(x,0) = \chi_{[-1,1]}.$$

Rakennus sijaitsee pisteessä $x_0 = 10$, ja se kestää painetta arvoon $P = 6$, ennenkuin romahtaa. Määritä ajanhetki t_0, jolloin paine rakennuksessa on korkeimmillaan. Romahtaako rakennus?