

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 3, kevät 2009

1. (Uudelleen edellisten harjoitusten toinen tehtävä) Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xuu_x + yuu_y = u^2 - 1, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0.$$

2. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xuu_x + yuu_y = 0, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0,$$

ja hahmottele karakteristikat. Mitä osaat sanoa tämän perusteella ratkaisusta?

3. Etsi ainakin viisi (5) eri ratkaisua ongelmalle

$$u_x + u_y = 1, \quad u(x, x) = x.$$

Vihje: Määrää ensin yhtälön $u_x + u_y = 1$ karakteristiset käyrät. Mitä huomaat alkuarvo käyrästä?

4. Määrää yhtälön

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0$$

yleinen ratkaisu. **Vihje:** Tee sopiva lineaarinen muuttujanvaihto, ja ratkaise näin saatu yksinkertaisempi yhtälö.

5. Määrää yhtälön

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2$$

yleinen ratkaisu.

6. Määrää edellisen tehtävän se ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_y(x, 0) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$