

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 2, kevät 2009

Toisissa tehtävissä jatketaan tutustumista ensimmäisen kertaluvun lineaari-
siin ja kvasilineaarisiin yhtälöihin.

1. Tarkastellaan Cauchy-ongelmaa

$$xu_x + yu_y = 2u, \quad u(x, 0) = x^2, \text{ kun } x > 0.$$

Osoita, että tällä on kaksi eri ratkaisua, ja selitä miksi tämä ei ole ristiriidassa luentojen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen kanssa.

2. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xuu_x + yuu_y = u^2 - 1, \quad u(x, x^2) = x^3, \quad x > 0.$$

3. Tarkastellaan yhtälöä

$$uu_x + u_y = -\frac{1}{2}u. \tag{0.1}$$

Osoita, että alkuarvokäyrän $\mathbb{R} \ni s \mapsto (s, 0, \sin s)$ jossain ympäristössä on olemassa yksikäsitteinen yhtälön (0.1) ratkaisu.

4. Ratkaise edellisen tehtävän Cauchy-ongelma.
5. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xu_x - yu_y = u + xy, \quad u(x, x) = x^2, \quad 1 \leq x \leq 2.$$

6. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_t + cu_x + u^2 = 0, \quad u(x, 0) = x,$$

missä c on positiivinen vakio.