Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 10, kevät 2009

1. Olkoon Ω rajoitettu C^2–tasoalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *Helmholtz–yhtälön*
$$-\Delta u(x) + ku(x) = 0,\ x \in \Omega,$$
ratkaisu, jolle $u|_{\partial\Omega} = 0$. Oletetaan, että $k > 0$. Osoita, että $u = 0$. **Vihje:** Käytä Greenin kaavoja!

2. Laske tason Laplace–operaattori napakoordinaateissa.

3. Oletaan, että tason avoimessa joukossa $\Delta u(x) + x \cdot \nabla u(x) = 0$, missä $x = (x_1, x_2)$. Osoita, että u:lla ei voi olla aitoja lokaaleja maksimeja.

4. Olkoon $B = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| > 1\}$. Oletetaan että $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, u harmoninen B:ssä ja että
$$\lim_{r\to\infty} \max_{|x|=r} u(x) = 0.$$
Osoita, että
$$\max_{\overline{B}}\ u = \max_{[x|=1} u.$$

5. Olkoon Ω tasoalue, ja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ yhtälön
$$\Delta u(x) + a(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x) = 0,\ x \in \Omega,$$
ratkaisu. Oletetaan, että kaikilla x pätee $c(x) < 0$. Osoita, että jos $u|_{\partial\Omega} = 0$, niin $u = 0$ koko alueessa Ω.

6. Olkoon $H = \{(x_1, x_2);\ x_2 > 0\}$ avoin ylempi puolitaso. Oletetaan, että $u \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$ on H:ssa harmoninen ja rajoitettu. Osoita, että
$$\sup_H u = \sup_{\partial H} u.$$
Onko väite totta, jos emme oleta että u on rajoitettu? **Vihje:** Tutki aluksi harmonista funktiota
$$u(x_1, x_2) - \varepsilon \ln \sqrt{x_1^2 + (x_2 + 1)^2},$$
kun $\varepsilon > 0$ sopivassa rajoitetussa alueessa.