

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 1, kevät 2009

Näissä ensimmäisissä tehtävissä on tarkoitus harjoitella ensimmäisen kertaluvun lineaaristen ja kvasilineaaristen yhtälöiden mekaanista ratkaisemista. Kannattaa tutkiskella luentojen esimerkkejä tarkkaan.

1. Tarkastellaan Cauchy-ongelmaa

$$u_x + u_y = 1, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (0.1)$$

Ratkaise karakteristiset käyrät, ja määrää niiden projektiot (x, y) -tasoon.

2. Määrää Cauchy-ongelman (0.1) ratkaisu.
3. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xu_x + (x + y)u_y = 1, \quad u(1, y) = y.$$

Onko ratkaisu määritelty koko tasossa?

4. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u_x + u_y = u^2, \quad u(x, 0) = 1.$$

5. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$u^2 u_x + u_y = 0, \quad u(x, 0) = x^2,$$

vasemmassa puolitasossa $\{(x, y); x > 0\}$.

6. Ratkaise Cauchy-ongelma

$$xu_x + (x^2 + y)u_y + (y/x - x)u = 1, \quad u(1, y) = 0$$

kun $x > 0$, ja laske $u(3, 6)$. Onko ratkaisu määrätty koko positiivisella reaaliakselilla?