Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Harjoitus 9, kevät 2009

1. Osoita, että ongelman
$$u'' + \lambda u = 0,\ 0 < x < 1,$$
$$u(0) - u'(0) = 0,\ u(1) + u'(1) = 0,$$
kaikki ominaisarvot ovat positiivisia, ja määrää vastaavat ominaisfunktiot.

2. Määrää Sturm–Liouville ongelman
$$((1 + x^2)u')' + \lambda u = 0,\ 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$
ominaisarvot, ja vastaavat ominaisfunktiot.

3. Määrää Sturm–Liouville ongelman
$$(x^2 v')' + \lambda v = 0,\ 1 < x < b,$$
$$v(1) = v(b) = 0,$$
ominaisarvot, ja vastaavat ominaisfunktiot. **Vihje:** Osoita, että funktio
$$v(x) = x^{-1/2} \sin(\alpha \ln x)$$
on diffyhtälön ratkaisu, jolla haettu käytös toisessa päätepisteessä.

4. Tarkastellaan ominaisarvo–ongelmaa
$$x(xu')' + \lambda u = 0,\ 1 < x < e.$$
$$u(1) = u'(e) = 0.$$
Määrää tämän epätriviaalit ratkaisut.

5. Määritellän sisätulo
$$\langle u, v \rangle = \int_1^e u(x)v(x)\, \frac{dx}{x}.$$
Osoita, että edellisen tehtävän eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisfunktiot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan tässä sisätulossa.

6. Arvioi Sturm–Liouville ongelman
$$u'' + (\lambda - x^2)u = 0, 0 < x < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0,$$
prinsipaaliominaisarvoa.