FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI

Helsingin Yliopisto, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luennot, kevät 2006 ja kevät 2008

Kari Astala ja Petteri Piiroinen (v. 2006)

Hans-Olav Tylli (v. 2008 hienosäätöä)

Huom.: tämä on vuoden 2008 virallinen versio

Sopivaa oheis- ja lisälukemistoa tarjoavat esimerkiksi seuraavat oppikirjat:

* D. Werner, *Funktionalanalysis*. Springer. (hyvä yleiskirja, saksankielinen)

* B. Bollobás, *Linear Analysis*. Cambridge Univ. Press, 1999.
  (ytimekäs yleiskirja)

* W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (3. painos). McGraw-Hill, 1987.
  (luvut 3-5, ei kata koko kurssia; lisäksi reaali- ja kompleksianalyysia)

* A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*. Dover, 1982.
  (halpa ja tiivis yleiskirja, myös mittateoriaa ja reaalianalyysia)

* W. Rudin, *Functional Analysis*. McGraw-Hill, 1991.
  (erilainen sisältö ja rakenne, laaja yleiskirja)

* J. Conway, *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990. (yleiskirja)

* I. J. Maddox, *Elements of Functional analysis*. Cambridge Univ. Press, 1977

Sisältö

0. Johdanto

Funktionaalianalyysissa tutkitaan muun muassa

- ääretönulotteisten vektoriavaruuksien, ja erityisesti täydellisten normiavaruuksien eli Banach avaruuksien ominaisuuksia (joskus myös yleisempien topologisten vektoriavaruuksien ominaisuuksia).
- näiden välisten jatkuvien lineaaristen (tai epälineaaristen) kuvausten ominaisuuksia.
- edellisten kohtien monia eri sovelluksia.

Yritämme seuraavan valmistelevan esimerkin kautta selvittää, miksi tällaisia kysymyksiä tutkitaan, ja samalla myös millaisia sovelluksia funktionaalianalyysillä tyypillisesti on (tarkempiin yksityiskohtiin palataan kurssin aikana).

0.1. **Esimerkki.** Tarkastellaan integraaliyhtälöä

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s)f(s)ds = g(x), \quad x \in [0,1], \tag{0.2}$$

missä $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ovat annettuja jatkuvia kuvauksia. Tehtävänä on löytää funktio f, jolle yhtälö (0.2) pätee.

Käy ilmi että

i) jos parametri $|\lambda|$ on pieni, yhtälön ratkaisu olemassa ja yksikäsitteinen; toisaalta

ii) kaikilla $|\lambda|$:illa näin ei välttämättä ole; herää siis kysymys mitä voidaan sanoa näistä poikkeuksellisista parametreista.

Tällaisiin kysymyksiin päädytään esimerkiksi monissa fysiikan kysymyksissä, vaikkapa viulun kielen ominaisvärähtelyjä määrättäessä. Itse asiassa, yksi matemaattisen fysiikan keskeisistä kysymyksistä 1900–luvun taitteessa oli selittää miksi ominaisvärähtelyjen joukko (so. poikkeusparametrien joukko) on diskreetti; kysymys palautui differentiaaliyhtälöiden kautta tyyppiä (0.2) oleviin yhtälöihin.

Huomaa että funktio $K(x,s)$ voi olla hyvinkin monimutkainen, eikä yhtälön suora integrointi, tavalla tai toisella, voi tulla kysymykseen; korkeintaan voimme hakea numeerisia ratkaisuja, kunhan yhtälöt kunnolla ymmärretään. Miten yhtälöitä (0.2) voisi silloin lähestyä ?

Tilanteen selvittämistä varten identifioidaan ensin (mahdollisten) ratkaisujen avaruus; luonnollinen arvaus on seuraava vektoriavaruus joka esiintyy jo Analyysi I:ssä (entisessä Differentiaali- ja integraalilaskenta I.1:ssä),

$$C(0,1) = \{ \, f : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f \text{ jatkuva välillä } [0,1] \, \}.$$

Avaruuteen liittyy luonnollinen "etäisyyden" mitta, eli normi (tästä myöhemmin paljon lisää):

$$\| \, f \, \|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| < \infty \quad , \; f \in C(0,1).$$

Pari ($C(0,1), \| \cdot \|_\infty$) tulee olemaan tyypillinen esimerkki *Banachin avaruudesta.*

Yhtälöön (0.2) liittyy operaattori

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = \int_0^1 K(x,s) f(s) ds, \quad x \in [0,1].$$

Huomataan, että tämä on avaruuden $C(0,1)$ luonnollisen yhteenlaskun suhteen *lineaarinen*, so.

$$T(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 T(f) + \lambda_2 T(g) \quad \forall \, f, g \in C(0,1), \; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi, yhtälö (0.2) voidaan kirjoittaa muotoon

$$f - \lambda \, T(f) = g$$

Kysymys on siis siitä, onko lineaarinen operaattori $I - \lambda T$ kääntyvä (bijektio) $C(0,1) \to C(0,1)$! (Tässä I on avaruuden $C(0,1)$ identtinen kuvaus.) Integraaliyhtälömme (0.2) on nyt muuttunut lineaarisen operaattorin ominaisarvotehtäväksi, ja ratkaisua varten meidän tulee kehittää "lineaarialgebrallisia" menetelmiä vektoriavaruuksissa kuten $C(0,1)$.

Nopeasti havaitaan kuitenkin selvä pulma: vektoriavaruus $C(0,1)$ on ääretönulotteinen ! Ei siis ole ollenkaan selvää mitkä/millä ehdoin lineaarialgebran tulokset yleistyvät näihin uusiin avaruuksiin. Tai mitä operaattoreilta vaaditaan, että lineaarialgebran ominaisarvotehtävät yleistyvät näihin ääretönulotteisiin tilanteisiin.

Funktionaalianalyysi pyrkii vastaamaan tämän tyyppisiin kysymyksiin, kehittämään ääretönulotteisten avaruuksien teoriaa silmälläpitäen esim. yllä kuvatun kaltaisia sovelluskohteita. Tällä kurssilla selvitämme Banach avaruuksien perusominaisuudet, keskeisimmät esimerkit (funktio- yms.)avaruuksista sekä myös Banach avaruuksien operaattoreiden perusominaisuudet. Pyrimme myös antamaan esimerkkejä teorian sovelluksista, ja tulemme mm. osoittamaan yo. väitteen i); jos aika riittää kurssin loppupuolella voidaan myös tarkastella kysymystä ii).

Sana "funktionaali" tarkoitti alunperin (noin 1880 – 1910) sellaista jatkuvaa kuvausta, jonka määrittelyjoukko on jokin "funktioavaruus"; tyypillisesti

$$\varphi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{tai}$$

$$\phi\colon C(0,1) \to \mathbb{R}, \quad \phi(f) = \int_0^1 f(s)^2\,\mathrm{d}s \qquad \text{(epälineaarinen funktionaali).}$$

Nyttemmin termin käyttö on hieman muuttunut, kuten myöhemmin huomaamme.

Funktionaalianalyysin *sovellusaloja* ovat muun muassa

– (muu) klassinen analyysi (reaali-, kompleksi- ja harmoninen analyysi)

– variaatiolaskenta ja approksimaatioteoria

– differentiaali- ja integraaliyhtälöt (TDY,ODY, IY)

– matemaattinen fysiikka (kvanttimekaniikka, ...)

– dynaamiset systeemit

– optimointi

– numeerinen analyysi (teoria)

– tn-teoria ja stokastiikka

$\vdots$

Kääntäen, analyysi ja sen sovellukset synnyttävät jatkuvasti uusia funktionaalianalyysin tutkimuksia.

1. Metriikka ja metrinen avaruus

1.1. **Määritelmä.** Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *metriikka* X:ssä, jos

(M1) $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ kaikilla $x, y, z \in X$ (”*kolmioepäyhtälö*”)

(M2) $\quad d(y,x) = d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$

(M3) $\quad d(x,y) = 0 \iff x = y$ (*Huom:* $d(x,y) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$)

Sanomme, että (X,d) eli joukko X varustettuna metriikalla d, on *metrinen avaruus* (yleensä jätetään d merkitsemättä, jos se selviää yhteydestä).

Huomautus.

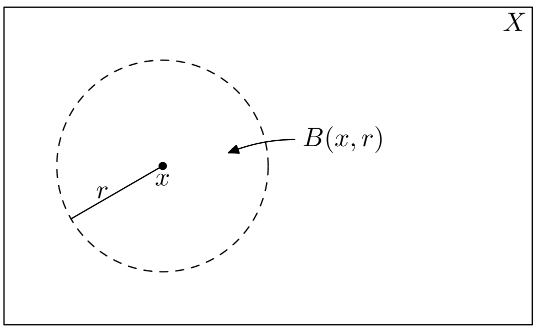
(1) Funktionaalianalyysin peruskurssilla metriikka d on (yleensä) jonkin normin indusoima (vrt. luku 2).
(2) Kuvaus $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ on *semimetriikka*, jos d toteuttaa ehdot (M1), (M2) sekä ehdon

    (M4) $\quad d(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Merkintöjä: Olkoon (X,d) metrinen avaruus, $x \in X$, $r > 0$:

$B(x,r) = \{\, y \in X : \; d(x,y) < r \,\}$ *avoin* x-keskinen, r-säteinen pallo

$\overline{B}(x,r) = \{\, y \in X : \; d(x,y) \leq r \,\}$ *suljettu* x-keskinen, r-säteinen pallo.



Kuva 1. Avoin pallo $B(x,r)$ metrisessä avaruudessa (X,d)

Oletamme, että lukija on tutustunut metristen avaruuksien perusteisiin (vrt. esim. [Väisälä : Topologia I]). Lukijan tulisi kerrata mitä metrisissä avaruuksissa tarkoittavat käsitteet avoin joukko, suljettu joukko ja kompakti joukko; samoin mitä tarkoitetaan ympäristöllä, ympäristökannalla, aliavaruudella, suppenevalla pistejonolla, jatkuvalla kuvauksella,.....

Muistamisen helpottamiseksi listaamme alla lyhyesti eräitä näistä käsitteistä.

Olkoon (X, d) metrinen avaruus:

– avoimet ja suljetut joukot: joukko $A \subset X$ on *avoin* jos jokaista $x \in A$ vastaa sellainen $r = r(x) > 0$, että avoin pallo
$$B(x, r) \subset A.$$
$A \subset X$ on *suljettu* jos komplementti
$$A^c = \{ x \in X : \ x \notin A \} \text{ on avoin.}$$
– metriikan indusoima *topologia* on joukkoperhe
$$\tau_d = \{ A \subset X : \ A \text{ on avoin } \ X\text{:ssä } \}.$$
– ympäristökanta, relatiivitopologia

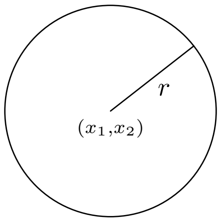
– jonon raja-arvo ja suppeneminen: jono $(x_n) \subset X$ *suppenee* kohti $x \in X$, jos
$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Siis jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että $d(x_n, x) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_\varepsilon$. Merkintä:
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \text{ tai } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$
– jatkuva kuvaus : Olkoot (X, d) ja (Y, d') metrisiä avaruuksia. Kuvaus $f \colon X \to Y$ on *jatkuva* pisteessä $x \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, että
$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \text{aina kun } d(x, y) < \delta \text{ (ja } y \in X).$$
f on *jatkuva X:ssä* jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in X$.

– kompakti joukko (Heine-Borel, ...)

1.2. **Esimerkki.** $\mathbb{R}^n$ varustettuna euklidisella metriikalla
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}, \tag{1.3}$$
kun $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. (Erikoistapaus $n = 1$: $d(x, y) = |x - y|, \ x, y \in \mathbb{R}$).

Kuvaus d on metriikka : TopoI, DII (tai myöhemmin avaruuden ℓ^p yhteydessä). Kolmioepäyhtälö on tässä tapauksessa arvio
$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - z_j|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j - z_j|^2}$$

kaikilla $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$.
Tapauksessa $n = 2$ ja $x = (x_1, x_2)$, niin $y = (y_1, y_2) \in B\big(x, r\big)$ jos ja vain jos $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 < r^2$.



Kuva 2. Avoin tason $\mathbb{R}^2$ pallo $B((x_1, x_2), r)$

Huomautus. Vastaavasti kaava (1.3), kun $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, määrittelee metriikan avaruuteen $\mathbb{C}^n$.

Metrinen avaruus (X, d) on *separoituva*, jos on olemassa sellainen numeroituva osajoukko $A \subset X$, että joukon A sulkeuma $\bar{A} = X$. Sanomme myös, että A on *tiheä* X:ssä.
Palautetaan mieliin, että sulkeuma voidaan kuvailla metriikan d avulla: jos $A \subset X$, niin A:n *sulkeumalle* $\bar{A}$ pätee

$$x \in \bar{A} \iff \text{on olemassa sellainen jono } (x_n) \subset A, \quad \text{että } d(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Separoituvuusehto $\bar{A} = X$ tarkoittaa siis: jos $y \in X$ ja $\varepsilon > 0$ ovat mielivaltaisia, niin on olemassa sellainen alkio $x \in A$, että $d(x, y) < \varepsilon$.

1.4. **Esimerkki.** $(\mathbb{R}^n, d)$ on separoituva, kun d on euklidinen etäisyys.

Todistus. Jos $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$ on annettuja, niin valitaan jokaisella $j \in \{1, \dots, n\}$ sellainen rationaaliluku $q_j \in \mathbb{Q}$, että

$$|x_j - q_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \ j = 1, \dots, n,$$

mikä on mahdollista, sillä $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Tällöin $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n$, joka on numeroituva ($\mathbb{Q}$ on numeroituva) ja

$$d(x, q) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j - q_j|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{n}}} < \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

$\square$

Seuraavaksi käyttökelpoinen kriteeri ei-separoituvuudelle:

1.5. **Lause.** *Olkoon X metrinen avaruus ja oletetaan, että on olemassa ylinumeroituva kokoelma $\mathcal{U}$ avaruuden X avoimia pistevieraita epätyhjiä osajoukkoja (siis jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin $U \cap V = \emptyset$). Silloin X* ei ole *separoituva.*

Todistus. Vastaoletus: Oletetaan, että X on separoituva. Tällöin $X = \overline{A}$, missä $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ numeroituva.

Jos $U \in \mathcal{U}$, niin $U \subset X$ on avoin ja epätyhjä. Vastaoletuksen perusteella voidaan kiinnittää sellainen $n_U \in \mathbb{N}$, että $a_{n_U} \in U$. Saadaan siis kuvaus $\alpha\colon \mathcal{U} \to \mathbb{N}$, $\alpha(U) = n_U$.

Näin saatu kuvaus α on *injektio*: jos $U, V \in \mathcal{U}$ ja $U \neq V$, niin oletuksen nojalla $U \cap V = \emptyset$. Tämä tarkoittaa että $a_{n_U} \neq a_{n_V}$, eli $n_U \neq n_V$, joten kuvaus α on injektio $\mathcal{U} \to \mathbb{N}$.

Tästä kuitenkin seuraisi, että $\mathcal{U}$ on numeroituva (mieti miksi!), mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. $\square$