8. Avoimen kuvauksen lause

Palautamme aluksi mieleen Topologian kursseilta ehkä tutut perusasiat yleisestä avoimen kuvauksen käsitteestä. Määrittelemme ensin avoimen kuvauksen globaalin ehdon avulla.

8.1. **Määritelmä.** Jos X ja Y ovat topologisia avaruuksia, niin kuvaus $f\colon X \to Y$ on *avoin*, jos $f(U)$ on avoin avaruudessa Y aina, kun U on avoin avaruudessa X.

Avoin kuvaus $f\colon X \to Y$ voidaan myös yhtäpitävästi määritellä seuraavalla lokaalilla tavalla. (On hyvä huomata, että tulos on täysin analoginen vastaavaan yhteyteen pisteittäisen ja globaalin jatkuvuusehtojen välillä.)

8.2. **Lause.** *Kuvaus $f\colon X \to Y$ on avoin jos ja vain jos f on avoin jokaisessa pisteessä $a \in X$, eli $f(U)$ on pisteen $f(a)$ ympäristö aina, kun U on pisteen a ympäristö*[11].

Todistus.
"$\Rightarrow$" Oletetaan, että f on avoin, ja olkoon $a \in X$ ja V on pisteen a ympäristö. Tällöin löytyy sellainen avoin joukko U, että $a \in U \subset V$, joten oletuksen nojalla $f(U)$ on avoin ja koska $f(a) \in f(U) \subset f(V)$, niin $f(V)$ on pisteen $f(x)$ ympäristö.
"$\Leftarrow$" Kääntäen, jos $U \subset X$ on avoin ja $a \in U$ sen mielivaltainen piste, niin oletuksen nojalla $f(U)$ on pisteen $f(a)$ ympäristö. Siispä löytyy sellainen avoin joukko $V \subset Y$, että $f(a) \in V \subset f(U)$. Erityisesti siis $f(a)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Koska tämä on voimassa jokaisella $a \in U$, niin jokainen piste $f(a) \in f(U)$ on joukon $f(U)$ sisäpiste. Tämä tarkoittaa, että $f(U)$ on avoin joukko. □

8.3. **Esimerkki.** (1) Jos (X, d) ja (Y, d') ovat metrisiä avaruuksia, niin f on avoin pisteessä a joss jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että

$$B(f(a), r') \subset f(B(a, r)).$$

(2) Kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ei ole avoin nollassa, sillä $f(-\varepsilon, \varepsilon) = [0, \varepsilon)$, mikä ei ole pisteen $0 = f(0)$ ympäristö. (Jatkuva kuvaus ei siis aina ole avoin.)
(3) Projektio $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $P(x, y) = x$, on avoin jokaisessa tason $\mathbb{R}^2$ pisteessä. Toisaalta, kuvaus $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x, 0)$, ei ole avoin missään pisteessä; itse asiassa $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R} \times \{0\}$ ei sisällä yhtään avointa joukkoa.

[11] tulkitsemme tässä, että V on pisteen x ympäristö, jos löytyy sellainen avoin joukko U, että $x \in U \subset V$

(4) Olkoon $X = (\mathbb{R}, \tau_1)$, missä τ_1 on tavallinen euklidinen topologia ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_2)$, missä $\tau_2 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on diskreetti topologia. Tällöin identtinen kuvaus $\mathrm{id} : X \to Y$ on avoin jokaisessa $\mathbb{R}$:n pisteessä, mutta ei jatkuva missään pisteessä.

8.4. *Huomautus.* Jatkuva kuvaus ei aina ole avoin (Esimerkki 8.3.(2)), eikä avoin kuvaus aina jatkuva (Esimerkki 8.3.(4)).

Kuinka avoimen kuvauksen käsite toimii lineaaristen kuvausten yhteydessä ? Seuraava tulos näyttää, että lineaarisille kuvauksille avoimuus jo yhdessä pisteessä takaa avoimuuden (Vrt. Lause 2.30 sivulla 24)

8.5. **Lause.** *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ lineaarinen. Tällöin T on avoin kuvaus jos ja vain jos T on avoin pisteessä $\bar{0}$, eli jokaista $r > 0$ vastaa sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$.*

Todistus.
”$\Rightarrow$” Tämä suunta seuraa suoraan Lauseesta 8.2.
”$\Leftarrow$” Oletetaan, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Olkoon $x \in E$ ja $r > 0$. Silloin löytyy sellainen $r' > 0$, että $T(B(\bar{0}, r)) \supset B(\bar{0}, r')$. Täten lineaarisuuden perusteella

$$T(B(x, r)) = T(x + B(\bar{0}, r)) = Tx + T(B(\bar{0}, r)) \supset Tx + B(\bar{0}, r') = B(Tx, r'),$$

eli T on avoin myös pisteessä x. Lauseen 8.2 nojalla T on avoin kuvaus. □

Havaitsemme, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $T\colon E \to F$ on avoin lineaarikuvaus, niin T on surjektio. (HT/11:1). Tämä havainto tarkoittaa, että topologinen lisäoletus (avoimuus) implikoi algebrallisen tiedon (surjektiivisuus).

Tavoitteenamme on nyt osoittaa, että yllättäen *Banachin* avaruuksien jatkuville lineaarikuvauksille T myös käänteinen väite pätee: surjektiivisuudesta (joka on pelkkä ”algebrallinen” ehto) seuraa, että T on avoin (joka on topologinen ehto !)

Ennen kuin todistamme tämän väitteen, muotoilemme tuloksen tarkasti. Seuraava lause on peräisin *Stefan Banachilta* (1892 – 1945).

8.6. **Lause** (Avoimen kuvauksen lause)**.** *Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin silloin T on avoin kuvaus.*

Kuten tasaisen rajoituksen periaatteen yhteydessä, ennen kuin ryhdymme todistamaan väitettä, tarkastelemme hieman väitteen seurauksia.

8.7. **Seuraus.** *Jos T on jatkuva lineaarinen bijektio Banachin avaruudesta E Banachin avaruuteen F, niin T on homeomorfismi (eli lineaarinen isomorfismi).*

Todistus. Meidän on osoitettava, että käänteiskuvaus T^{-1} on jatkuva $F \to E$. Lauseen 8.6 nojalla T on avoin kuvaus $E \to F$. Jos U on avoin joukko avaruudessa E, niin tällöin (koska T on bijektio) alkukuva $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ on siis avoin joukko avaruudessa F. Näin T^{-1} on jatkuva, joten T on homeomorfismi. □

8.8. **Esimerkki.** Olkoot $x \mapsto \| x \|_1$ ja $x \mapsto \| x \|_2$ normeja vektoriavaruudessa E ja $\| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1$ kaikilla $x \in E$, missä $\beta > 0$. Tällöin identtinen kuvaus $(E, \| \cdot \|_1) \to (E, \| \cdot \|_2)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Jos lisäksi sekä $(E, \| \cdot \|_1)$ että $(E, \| \cdot \|_2)$ ovat Banachin avaruuksia, niin identtinen kuvaus on Korollaarin 8.7 nojalla homeomorfismi, joten normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_2$ ovat ekvivalentteja. Toisin sanoen on olemassa sellainen $\alpha > 0$, että

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1,$$

kun $x \in E$. (Katso Lause 2.12 sivulla 14).

Erikoistapauksena tarkastelemme avaruudessa $C = C([0,1], \mathbb{R})$ normeja

$$x \mapsto \| x \|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|, \quad x \mapsto \| x \|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Tällöin $\| x \|_1 \leq \| x \|_\infty$, kun $x \in C$, joten identtinen kuvaus id : $(C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ on jatkuva lineaarinen bijektio. Mutta tiedämme, että normit $\| \cdot \|_1$ ja $\| \cdot \|_\infty$ eivät ole ekvivalentteja (tarkastele polynomeja $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$). Voidaan siis päätellä, että identtinen kuvaus id : $(C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ ei ole avoin kuvaus, sillä se on jatkuva, mutta ei homeomorfismi. Näin ollen täydellisyys on olennainen oletus avoimen kuvauksen lauseessa.

(Tästä seuraa ohimennen myös, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus, sillä muuten avoimen kuvauksen lauseen nojalla id : $(C, \| \cdot \|_\infty) \to (C, \| \cdot \|_1)$ olisi homeomorfismi. Toinen konkreettisempi tapa nähdä, että $(C, \| \cdot \|_1)$ ei ole Banachin avaruus on käyttää Lemmaa 5.6, jonka nojalla $(C, \| \cdot \|_1)$ on tiheä Banachin avaruudessa $L^1(0,1)$. Jos $(C, \| \cdot \|_1)$ olisi Banachin avaruus, niin se olisi Lauseen 3.13 sivulla 32 nojalla suljettu avaruudessa $L^1(0,1)$, mutta tiheyden nojalla tällöin olisi $C(0,1) = L^1(0,1)$, mikä johtaa ristiriitaan.)

Nyt olemme valmiita aloittamaan avoimen kuvauksen lauseen todistamisen. Tarvitsemme ensin tärkeän aputuloksen, jonka todistamiseen käytetään Bairen lausetta. Ennen kuin ryhdymme tämän apulauseen todistukseen, toteamme, että $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$, aina kun A ja B ovat normiavaruuden E osajoukkoja.

Tämän havaitsemiseen olkoon $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellaiset $x_0 \in A$ ja $y_0 \in B$, että

$$\| x - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad \| y - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2},$$

joten

$$\| (x+y) - (x_0 + y_0) \| \le \| x - x_0 \| + \| y - y_0 \| < \varepsilon.$$

Siispä $x + y \in \overline{A+B}$. (Huomattakoon, että sisältyvyys $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$ voi olla aito, katso HT/3:1).

8.9. **Lemma.** *Olkoon E normiavaruus, F Banachin avaruus ja T lineaarinen surjektio $E \to F$. Jos V on jokin pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö avaruudessa E, niin $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F.*

Todistus. Koska V on pisteen $\bar{0} \in E$ ympäristö, on olemassa sellainen $B = B(\bar{0}, r)$, että $B + B \subset V$. Nimittäin, jos $B(\bar{0}, 2r) \subset V$, niin kolmioepäyhtälön perusteella $B(\bar{0}, r) + B(\bar{0}, r) \subset V$.

Jos $y \in F$, niin $y = Tx$ jollakin $x \in E$, koska oletimme, että T on surjektio. Valitaan sellainen $n \in \mathbb{N}$, että $\| x \| < nr$, eli $x \in nB$. Siis

$$y \in T(nB) = nT(B) \subset n\overline{T(B)}.$$

Koska $y \in F$ on mielivaltainen, olemme siis osoittaneet, että

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}.$$

Tässä $n\overline{T(B)} = \overline{nT(B)}$, sillä kuvaus $x \mapsto nx$ on homeomorfismi $F \to F$. Koska F on Banachin avaruus, voimme soveltaa Bairen lausetta, Seurauksen 7.2 muodossa: Siis ainakin yksi suljetuista joukoista $n\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitsemme jatkossa selvyyden vuoksi avaruuden F palloja notaatiolla B_F.

Jos nyt $B_F(x_0, \rho_0) \subset n\overline{TB}$, niin

$$B_F(\frac{x_0}{n}, \frac{\rho_0}{n}) = \frac{1}{n} B_F(x_0, \rho_0) \subset \overline{T(B)},$$

eli myös joukko $\overline{T(B)}$ sisältää avoimen pallon. Merkitään $x = \frac{1}{n}x_0$ ja $\rho = \rho_0/n$, jolloin siis

$$B_F(x, \rho) \subset \overline{T(B)}.$$

Lisäksi pätee, että $-x \in \overline{T(B)}$. Nimittäin jos $x \in \overline{T(B)}$, niin löytyy sellainen approksimoiva jono $(y_n) \subset T(B)$, että $x = \lim_n y_n$. Nyt

$$y_n \in T(B) = T(B(\bar{0}, r)) \Longrightarrow -y_n \in T(B) \Longrightarrow -x = \lim_n (-y_n) \in \overline{T(B)}.$$

Tämän avulla saamme, että

$$\begin{aligned} B_F(\bar{0},\rho) &= -x + B_F(x,\rho) \subset \overline{T(B)} + \overline{T(B)} \subset \overline{T(B) + T(B)} \\ &= \overline{T(B+B)} \subset \overline{T(V)}. \end{aligned}$$

Siis $\overline{T(V)}$ on pisteen $\bar{0} \in F$ ympäristö avaruudessa F. □

Avoimen kuvauksen lauseen todistus: Osoitamme, että T on avoin pisteessä $\bar{0}$. Huomautamme, että Lemma 8.9 osoittaa melkein tämän, kunhan vain voisimme korvata sulkeuman $\overline{T(V)}$ joukolla $T(V)$. Todistus perustuukin tämän osoittamiseen.

Olkoon $r > 0$ annettu, $r_0 = \frac{1}{2}r$ ja $r_k = 2^{-k} r_0$, kun $k \in \mathbb{N}$. Siis $r_k > 0$ ja

$$r_0 = \sum_{k=1}^{\infty} r_k.$$

Lemman 8.9 nojalla löydämme luvut $s_k > 0$, joille

$$B_F(\bar{0}, s_k) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Jos $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_k))}$, niin $\| y \| \le \| T \| r_k \to 0$, joten

$$\lim_{k\to\infty} s_k = 0.$$

Väite: $B_F(\bar{0}, s_0) \subset T(B_E(\bar{0}, r))$.

Tätä varten olkoon $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$. Siispä $y \in \overline{T(B_E(\bar{0}, r_0))}$. Löytyy siis $x_0 \in B_E(\bar{0}, r_0)$, jolle

$$\| y - Tx_0 \| < s_1$$

eli $y - Tx_0 \in B_F(\bar{0}, s_1) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_1))}$. Vastaavasti jatkamalla havaitsemme, että on olemassa sellainen $x_1 \in B_E(\bar{0}, r_1)$, että

$$\| y - Tx_0 - Tx_1 \| < s_2,$$

eli $(y - Tx_0 - Tx_1) \in B_F(\bar{0}, s_2) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_2))}$.
Induktioaskel: jos $x_k \in B_E(\bar{0}, r_k)$, $0 \le k \le n-1$, ja

$$y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k \in B_F(\bar{0}, s_n) \subset \overline{T(B_E(\bar{0}, r_n))},$$

niin on olemassa sellainen $x_n \in B_E(\bar{0}, r_n)$, että

$$\| (y - \sum_{k=0}^{n-1} Tx_k) - Tx_n \| = \| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \| < s_{n+1}.$$

Saamme siten konstruoitua jonon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ avaruudessa E, jolle $\| x_k \| < r_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < \sum_{k=0}^{\infty} r_k = 2r_0 = r < \infty,$$

eli sarja $\sum_k x_k$ on absoluuttisesti suppeneva avaruudessa E. Koska oletimme, että E on täydellinen, niin Lauseen 3.22 sivulla 36 nojalla tiedämme, että sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E. Merkitsemme tätä rajaa

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k.$$

Tällöin edellisen arvion nojalla

$$\| x \| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \| x_k \| < r,$$

joten $x \in B_E(\bar{0}, r)$. Koska edelleen

$$\Big\| y - T(\sum_{k=0}^{n} x_k) \Big\| = \Big\| y - \sum_{k=0}^{n} Tx_k \Big\| < s_{n+1} \to 0,$$

kun $n \to \infty$, niin T:n jatkuvuuden perusteella

$$y = \lim_{n\to\infty} T\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = T\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k \Big) = Tx.$$

Olemme siis osoittaneet seuraavan: Jos $y \in F$ ja $\| y \| < s_0$, niin $y = Tx$, missä $x \in E$ ja $\| x \| < r$. Toisin sanoen, $T(B_E(\bar{0}, r)) \supset B_F(\bar{0}, s_0)$. Koska $r > 0$ oli mielivaltaisesti valittu, on siis T avoin kuvaus pisteessä $\bar{0}$, joten T on Lauseen 8.5 nojalla avoin kuvaus. □

8.10. *Huomautus.* Avoimen kuvauksen lause voidaan formuloida myös seuraavalla yhtäpitävällä tavalla:
Jos E ja F ovat Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ on surjektio, niin on olemassa sellainen $M < \infty$, että jokaista $y \in F$ kohti on olemassa $x \in E$, jolle $Tx = y \quad ja \quad \| x \| \leq M \| y \|$.

Todistus. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla löytyy sellainen $\overline{B_F(\bar{0}, 1/M)} \subset T(B_E(\bar{0}, 1))$ jollakin $0 < M < \infty$. Jos nyt $y \in F$, niin

$$\widehat{y} = \frac{y}{M \| y \|} \in \overline{B_F(\bar{0}, 1/M)}$$

ja siten $\widehat{y} = T\widehat{x}$, missä $\| \widehat{x} \| < 1$ eli

$$y = T(M \| y \| \widehat{x}) =: Tx, \quad \text{ja} \quad \| x \| = \| M \| y \| \widehat{x} \| \leq M \| y \|.$$

□

8.11. **Seuraus.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathscr{L}(E, F)$ jatkuva lineaarinen* injektio. *Tällöin kuva-avaruus $T(E)$ on avaruuden F suljettu aliavaruus jos ja vain jos löytyy sellainen $\beta > 0$, että*

$$\| Tx \| \geq \beta \| x \| \quad \textit{jokaisella } x \in E. \tag{8.12}$$

Huomautus. Jos yllä oleva ehto (8.12) pätee, sanomme että T on *alhaalta rajoitettu.*

Todistus. "$\Rightarrow$" Oletetaan, että $T(E)$ on suljettu. Koska $T(E) \subset F$ on Banachin avaruuden suljettu aliavaruus, niin se on myös Banachin avaruus (Lause 3.13 sivulla 32). Nyt siis $T : E \to T(E)$ on jatkuva bijektio, joten väite seuraa suoraan avoimen kuvauksen lauseesta (kun käytetään edellisen sivun muotoilua).

"$\Leftarrow$" Jos ehto (8.12) pätee, niin

$$\beta\| x \| \leq \| Tx \| \leq \|T\| \cdot \| x \|$$

jokaisella $x \in E$, koska T on myös jatkuva. Siispä $T\colon E \to T(E)$ on lineaarinen isomorfismi ja Lauseen 6.14 sivulla 108 nojalla $T(E)$ on täydellinen. Nyt Lause 3.13 sivulla 32 mukaan $T(E)$ on suljettu. $\square$

Huomautus. Yleensä jatkuva lineaarinen injektio $T \in \mathscr{L}(E, F)$ *ei* ole alhaalta rajoitettu. Esimerkiksi operaattori $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(x_k) = (\frac{1}{k}x_k)$, kun $(x_k) \in \ell^2$, on jatkuva lineaarinen injektio. Toisaalta,

$$\| T(0, 0, \dots, 1, 0, \dots) \|_2 = \frac{1}{k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

joten T ei ole alhaalta rajoitettu. (Seurauksen 8.11 mukaan kuva $T(\ell^2)$ siis ei ole suljettu.)

Sovellus Fourier-analyysiin

Muistamme, että jos $f \in L^2(0, 2\pi)$, niin sen Fourier-kertoimet $(\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ Besselin epäyhtälön nojalla, eli $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < \infty$.

Kääntäen, Riesz–Fischerin lauseen mukaan, jos $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$, niin on olemassa $f \in L^2(0, 2\pi)$, jolle

$$\widehat{f}(k) = a_k \quad \text{jokaisella } k \in \mathbb{Z}.$$

Tästä herää seuraavat kysymykset:

1. Onko L^1-funktioille olemassa vastaava jonoavaruus X, jolle $(\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in X$ kaikilla $f \in L^1(0, 2\pi)$?
2. Onko Riesz–Fischerin lauseella vastinetta avaruudessa L^1 ?

Ensimmäiseen kysymykseen saadaan valoa nk. Riemann–Lebesguen lemmasta. Olkoon $c_0(\mathbb{Z}) = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} : x_k \in \mathbb{C} \text{ kaikilla } k \in \mathbb{Z} \text{ ja } \lim_{|k|\to\infty} x_k = 0\}$ varustettuna sup-normilla $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}|x_k|$. Tällöin $(c_0(\mathbb{Z}), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.

8.13. **Lause** (Riemann–Lebesguen lemma)**.** *Jos $f \in L^1(0, 2\pi)$, niin*

$$(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z}).$$

Todistus: (**ei esitetty 2008**) Jos $f \in L^1(0,2\pi)$, niin

$$(8.14)\qquad |\widehat{f}(n)| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t\Big| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)||e^{-int}|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\|\, f\,\|_1.$$

Siis $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ on rajoitettu jono ja $\|\,(\widehat{f}(n))\,\|_\infty = \sup|\widehat{f}(n)| \le \frac{1}{2\pi}\|\, f\,\|_1$. Toisaalta Lauseen 5.4 sivulla 81 ja Lauseen 5.6 sivulla 83 nojalla trigonometriset polynomit ovat tiheässä avaruudessa $L^1(0,2\pi)$.

Siten jos $\varepsilon > 0$ on annettu, löydetään trigonometrinen polynomi

$$P(x) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikx},$$

jolle on voimassa $\|\, f - P\,\|_1 < \varepsilon$.

Koska edellä $\widehat{P}(n) = a_n$ kaikilla n, niin $\widehat{P}(n) = 0$ aina, kun $|n| > m$. Tätä havaintoa voidaan käyttää nyt hyväksi. Olkoon $|n| > m$. Tällöin

$$|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n) - \widehat{P}(n)| = |(\widehat{f - P})(n)| \le \frac{1}{2\pi}\|\, f - P\,\|_1 < \varepsilon,$$

joten päättelemme, että $|\widehat{f}(n)| \to 0$, kun $|n| \to \infty$, eli $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$. $\square$

Siis $X = c_0(\mathbb{Z})$ kelpaa hyvin vastaukseksi kysymykseen (1). Seuraavaksi vastataan kysymykseen (2), eli tarkastellaan onko Riemann–Lebesguen lemman 8.13 käänteinen tulos voimassa (eli onko kysymykseen (2) vastaus myönteinen). Avoimen kuvauksen lauseen avulla osoitamme, että käänteinen tulos ei ole voimassa.

8.15. **Lause.** *Kuvaus $T\colon f \mapsto (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ on jatkuva lineaarinen injektio avaruudelta $L^1(0,2\pi)$ avaruuteen $c_0(\mathbb{Z})$. Kuva-avaruus $T(L^1(0,2\pi))$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, mutta T* ei ole *surjektio.*

Todistus. Selvästi T on lineaarinen, koska $f \mapsto \widehat{f}(k)$ on lineaarinen kaikilla k. Edellisen lauseen todistus näyttää, että T on jatkuva kuvaus $T\colon L^1 \to c_0$ ja $\|\, T\,\| \le (2\pi)^{-1}$. (Itse asiassa: $\|\, T\,\| = (2\pi)^{-1}$, sillä jos $f(t) \equiv 1$ kun $t \in [0,2\pi]$, niin $\|\, f\,\|_1 = 2\pi$ ja $\|\, Tf\,\|_\infty = 1$, koska $\widehat{f}(0) = 1$ ja $\widehat{f}(k) = 0$, kun $k \ne 0$).

Näytetään seuraavaksi, että T on injektio. [**injektiivisyysargumentin yksityiskohdat sivuutettiin v. 2008**]

On siis osoitettava, että jos $Tf = \bar{0}$, eli $\widehat{f}(n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$, niin itse asiassa $f = \bar{0}$. Oletamme siis, että $Tf = \bar{0}$, joten

$$(8.16)\qquad \int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{ikt} = \sum_{k=-m}^{m} a_k \widehat{f}(-k) = 0,$$

kaikilla trigonometrisilla polynomeilla $g = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$. Fejerin lauseen 5.4 sivulla 81 ja Lebesguen dominoidun suppenemisen lauseen avulla (8.16) pätee myös kaikilla $g \in C(0,2\pi)$ (mieti yksityiskohdat läpi; muista että approksimoiva keskiarvo $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(g,\cdot)$ *on* trigonometrinen polynomi).

Jos nyt $A \subset [0,2\pi]$ on mitallinen joukko, niin Lauseen 5.6 sivulla 83 todistuksen nojalla löytyy sellainen jono $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C(0,2\pi)$, että

$$|g_n(t)| \le 1 \quad \forall t \in [0,2\pi], n \in \mathbb{N} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \chi_A(t) \quad \text{m.k. } t \in [0,2\pi].$$

Soveltamalla taas Lebesguen dominoidun suppenemisen lausetta, niin saamme, että kaava (8.16) pätee myös funktioille $g = \chi_A$, eli

$$\int_A f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_A(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Olkoon nyt $f \in L^1(0,2\pi)$ positiivinen funktio eli $f \ge 0$. Olkoon $n > 0$ ja olkoon $A_n = \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 1/n \,\}$. Joukko A_n on mitallinen joukko, sillä f on mitallinen funktio. Soveltamalla kaavaa (8.16) joukon A_n karakteristiseen funktioon χ_{A_n} havaitaan että

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t)\chi_{A_n}(t)\,\mathrm{d}t \ge \frac{1}{n} m(A_n).$$

Siispä $m(A_n) = 0$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joten päättelemme subadditiivisuuden nojalla, että myös joukon $A = \bigcup_n A_n$ mitta $m(A) = 0$. Koska

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) \ge 1/n \,\} = \{\, t \in [0,2\pi] : \ f(t) > 0 \,\},$$

niin olemme osoittaneet, että $0 \le f(t) \le 0$ m.k $t \in [0,2\pi]$, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0,2\pi]$.

Olkoon nyt $f \in L^1(0,2\pi)$ mielivaltainen. Tällöin funktio f voidaan esittää muodossa (jakaamalla ensin reaali- ja imaginaariosiin)

$$f = (u_+ - u_-) + i(v_+ - v_-), \quad u_+, u_-, v_+, v_- \ge 0.$$

Edellisen päättelyn nojalla $u_+ = u_- = v_+ = v_- = 0$ melkein kaikkialla, joten $f(t) = 0$ m.k. $t \in [0,2\pi]$. Olemme siis osoittaneet, että $\mathrm{Ker}\,(T) = \{\overline{0}\}$ ja T on injektio.

Kuva $T(L^1)$ on tiheä: Olkoon $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in c_{00}(\mathbb{Z}) \subset c_0(\mathbb{Z})$ äärellinen jono, ts. $a_k = 0$, kun $|k| > m$ (jollakin $m \in \mathbb{N}$). Tällöin trigonometrinen polynomi

$$P(t) = \sum_{k=-m}^{m} a_k e^{ikt}$$

on L^1-funktio, ja selvästi

$$\widehat{P}(n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} a_k \int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-int}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} a_k, & \text{jos} \quad n = -m, -m+1, \dots, m \\ 0, & \text{jos} \quad |n| > m \end{cases}$$

Siis $T(P) = (\widehat{P}(k))_{k\in\mathbb{Z}} = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, joten $c_{00}(\mathbb{Z}) \subset T(L^1)$. Äärelliset jonot $c_{00}(\mathbb{Z})$ ovat tiheässä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$, eli $\overline{c_{00}(\mathbb{Z})} = c_0(\mathbb{Z})$, joten kuva $T(L^1)$ on tiheä avaruudessa $c_0(\mathbb{Z})$.
Lopuksi osoitamme avoimen kuvauksen lauseen avulla, että $T(L^1) \neq c_0(\mathbb{Z})$ eli T ei ole surjektio. Nimittäin, jos T olisi surjektio, eli $T(L^1) = c_0(\mathbb{Z})$, niin silloin $T\colon L^1 \to c_0(\mathbb{Z})$ olisi bijektio. Tällöin avoimen kuvauksen lauseen nojalla T olisi isomorfismi, joten erityisesti olisi olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$\| Tf \|_\infty \geq \beta \| f \|_1 \tag{8.17}$$

jokaisella $f \in L^1(0, 2\pi)$.

Toisaalta tiedämme, että Dirichlet'n ydin $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \in L^1(0, 2\pi)$, ja $\| (\widehat{D}_n(k)) \|_\infty = 1$, jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi Lauseen 7.9 sivulla 120 todistuksessa osoitimme (kaava (7.12)), että $\| D_n \|_1 \to \infty$. Tämä on ristiriidassa arvion (8.17) kanssa, joten T ei ole surjektio. □

Esitämme vielä *suljetun kuvaajan lauseen* (Lause 8.20 alla), joka on avoimen kuvauksen lauseen sovellus (ja itse asiassa sen yhtäpitävä versio). Tämän keskeisen tuloksen avulla voidaan usein helpommin todistaa, että annettu lineaarikuvaus on jatkuva.

8.18. **Määritelmä.** Kuvauksen $f\colon X \to Y$ *kuvaaja* on joukko

$$G(f) = \{\ (x, f(x)) \in X \times Y :\ x \in X\ \} \subset X \times Y.$$

Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin varustetaan seuraavassa $E \times F$ normilla

$$\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|, \quad (x, y) \in E \times F.$$

Tällöin $(E \times F, \| \cdot \|)$ on Banachin avaruus, jos E ja F ovat Banachin avaruuksia (tarkista!). Seuraavaksi yleinen topologinen tieto:

8.19. **Lause.** *Olkoon E ja F normiavaruuksia sekä $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin funktion f kuvaaja $G(f) \subset E \times F$ on suljettu joukko.*

Todistus. Jos $(x, y) \in \overline{G(f)} \subset E \times F$, niin on olemassa sellaiset kuvaajan pisteparit $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$ kun $n \in \mathbb{N}$, että

$$\| (x_n, f(x_n)) - (x, y) \|_{E\times F} = \|x_n - x\| + \|f(x_n) - y\| \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Tällöin siis sekä $\|x_n - x\| \to 0$ että $\|f(x_n) - y\| \to 0$ kun $n \to \infty$. Koska oletimme, että f on jatkuva, niin myös $f(x_n) \to f(x)$ avaruudessa F kun $n \to \infty$. Raja-arvon yksikäsitteisyydesta seuraa silloin, että $y = f(x)$, eli $(x, y) = (x, f(x)) \in G(f)$. Siispä $G(f)$ on suljettu avaruudessa $E \times F$. □

Jos $T\colon E \to F$ on lineaarinen kuvaus, niin sen kuvaaja $G(T)$ on avaruuden $E \times F$ vektorialiavaruus. Nimittäin,

$$\alpha(x,Tx)+\beta(y,Ty)=(\alpha x+\beta y,\alpha Tx+\beta Ty)=(\alpha x+\beta y,T(\alpha x+\beta y))\in G(T)$$

kaikilla $x,y\in E$ ja $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$. Jos lisäksi E ja F ovat Banachin avaruuksia, niin edellisen lauseen, ja sitä edeltäneen huomautuksen, nojalla $G(T)$ on myös Banachin avaruus.

Suljetun kuvaajan lause kertoo, että käänteinen tulos pätee *lineaarikuvauksille* $T\colon E\to F$, missä E,F ovat Banachin avaruuksia.

8.20. **Lause** (Suljetun kuvaajan lause)**.** *Olkoot E ja F Banachin avaruuksia, ja $T : E \to F$ sellainen lineaarikuvaus, että kuvaaja*

$$G(T)=\{\ (x,Tx):\ x\in E\ \}\subset E\times F \quad \textit{on suljettu joukko.}$$

Tällöin T on jatkuva, eli $T\in\mathscr{L}(E,F)$.

8.21. *Huomautus.* (1) Suljetun kuvaajan lause antaa uuden laskennallisen menetelmän lineaarisen kuvauksen T jatkuvuuden toteamiseen. Lauseen nojalla riittää osoittaa, että $\overline{G(T)}=G(T)$, mikä on yhtäpitävää (vrt. Lauseen 8.19 argumentti) seuraavan ehdon kanssa: aina jos

$$(*)\qquad \left.\begin{array}{ll} x_n\to x & \text{avaruudessa } E \text{ kun } n\to\infty\\ Tx_n\to y & \text{avaruudessa } F \text{ kun } n\to\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow y=Tx.$$

(Huomaa, että ehto $(*)$ on *heikennys* verrattuna jatkuvuuden suoraan osoittamiseen: jos jono $(x_n)\subset E$ suppene E:ssa, niin edellä lisätietona on myös että kuvajono (Tx_n) suppenee F:ssa.)
(2) Suljetun kuvaajan lauseessa lineaarisuus on oleellinen oletus, sillä on olemassa epäjatkuva (ja epälineaarinen) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, jonka kuvaaja $G(f)\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ on suljettu (HT/12:1).

Suljetun kuvaajan lauseen todistus: Koska $E\times F$ on Banachin avaruus ja kuvaaja $G(T)$ on suljettu vektorialiavaruus, niin $G(T)$ on Banachin avaruus (vrt. Lause 3.12 sivulla 32). Määritellään kuvaus $\psi : G(T)\to E$ asettamalla

$$\psi\big((x,Tx)\big)=x,\quad (x,Tx)\in G(T).$$

Koska T on lineaarinen, niin ψ on myös lineaarinen (tarkista!). Lisäksi ψ on bijektio, sillä ψ on selvästi surjektio sekä myös injektio: nimittäin

$$\psi\big((x,Tx)\big)=\bar 0\Longrightarrow x=\bar 0\Longrightarrow (x,Tx)=(\bar 0,\bar 0).$$

Lisäksi ψ on rajoitettu, koska

$$\|\,\psi\big((x,Tx)\big)\,\|=\|\,x\,\|\le\|\,x\,\|+\|\,Tx\,\|=\|\,(x,Tx)\,\|,\quad (x,Tx)\in G(T).$$

Yhteenvetona siis ψ on jatkuva lineaarinen bijektio $G(T) \to E$. Nyt avoimen kuvauksen lauseen 8.6 (tai Seurauksen 8.7 muotoilun) nojalla myös käänteiskuvaus ψ^{-1} on jatkuva, joten ψ on lineaarinen isomorfismi. Seurauksen 6.11 sivulla 108 nojalla on siis olemassa sellainen vakio $\beta > 0$, että

$$\beta \| (x, Tx) \| \le \| \psi\big((x, Tx)\big) \| = \| x \| \quad \text{kaikilla } (x, Tx) \in G(T).$$

Tästä seuraa arvio

$$\beta \| Tx \| \le \beta(\| x \| + \| Tx \|) = \beta \| (x, Tx) \| \le \| x \|, \quad \text{kun } x \in E.$$

Siis $\| Tx \| \le (1/\beta) \| x \|$, joten T on jatkuva. □

Seuraavassa tarkastellaan tyypillistä suljetun kuvaajan lauseen sovellusta.

8.22. **Esimerkki.** Olkoon $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ ”ääretön” matriisi, joka toteuttaa ehdot:

(1) Matriisi (a_{ij}) on rajoitettu, eli

$$M := \sup_{i,j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| < \infty.$$

(2) Jos $s = (s_j) \in \ell^1$ on mielivaltainen jono, ja

$$t_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j, \quad i \in \mathbb{N},$$

niin aina $(t_i) \in \ell^1$.

Ehto (2) sanoo, että matriisi (a_{ij}) määrittelee lineaarikuvauksen $A : \ell^1 \to \ell^1$, jolle

$$As = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} s_j \Big)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \text{kun} \quad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Intuitiivisesti tämä voidaan ajatella seuraavasti:

$$As = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \qquad s = (s_j) \in \ell^1.$$

Osoitetaan nyt, että A on jatkuva käyttämällä suljetun kuvauksen lausetta. Tätä varten olkoon $x^{(n)} \in \ell^1$ sellaisia alkiota (missä $n \in \mathbb{N}$), että $x^{(n)} \to x$ ja $A(x^{(n)}) \to y$ avaruudessa ℓ^1 kun $n \to \infty$. Merkitään $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ kun $n \in \mathbb{N}$ ja $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ kiinteä. Määritellään kuvaus $\Lambda \colon \ell^1 \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$\Lambda u = (Au)_k, \quad u = (u_j) \in \ell^1.$$

Ehdon (2) perusteella Λ on todella määritelty $\ell^1 \to \mathbb{K}$, ja Λ on lineaarinen. Koska matriisi (a_{ij}) on rajoitettu ehdon (1) nojalla, niin

$$|\Lambda u| = |\sum_{j=1} a_{kj}u_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty}|a_{kj}||u_j| \leq M\| u \|_1, \; u = (u_j) \in \ell^1,$$

joten Λ on jatkuva $\ell^1 \to \mathbb{K}$. Tällöin jatkuvuuden ja suppenemisoletuksen nojalla

$$y_k = \lim_{n\to\infty}(Ax^{(n)})_k = \lim_{n\to\infty}\Lambda x^{(n)} = \Lambda(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = \Lambda x = (Ax)_k.$$

Olemme siis näyttäneet, että $y = Ax$, koska $k \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen koordinaatti. Suljetun kuvauksen lauseen nojalla A on jatkuva $\ell^1 \to \ell^1$.

(Harjoituksen vuoksi kannattaa yrittää osoittaa sama arvioimalla suoraan normia $\| Ax \|_1$, mikä ei ole aivan suoraviivaista.)