4. Hilbertin avaruudet

Hilbertin avaruudet ovat ääretönulotteisista normiavaruuksista ominaisuuksiltaan kaikkein lähinnä ”kotiavaruutta” $\mathbb{R}^n$ tai $\mathbb{C}^n$. Tästä syystä niiden teoria on joustava ja käyttökelpoinen monessa tilanteessa. Hilbertin avaruuden normi määräytyy *sisätulosta*.

4.1. **Määritelmä.** Olkoon E vektoriavaruus, jonka skalaarikuntana on $\mathbb{K}$. Kuvaus $f\colon E \times E \to \mathbb{K}$ on *Hermiten muoto*, jos

(i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$ kaikilla $x_1, x_2, y \in E$,

(ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$

(iii) $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$ kaikilla $x, y \in E$. (Tässä $\overline{z} = a - ib$ on kompleksiluvun $z = a + ib \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaatti.)

Huomautus.

1. Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin ehto (iii) voidaan kirjoittaa muodossa $f(y, x) = f(x, y)$ kaikilla $x, y \in E$
2. Suoraan laskemalla nähdään, että
$$f(x, y_1 + y_2) = \overline{f(y_1 + y_2, x)} \overset{(i)}{=} \overline{f(y_1, x)} + \overline{f(y_2, x)} = f(x, y_1) + f(x, y_2)$$
ja
$$f(x, \lambda y) = \overline{f(\lambda y, x)} \overset{(ii)}{=} \overline{\lambda}\ \overline{f(y, x)} = \overline{\lambda} f(x, y)$$
kaikilla $x, y_1, y_2 \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Hermiten muoto f on siis *konjugaattilineaarinen* jälkimmäisen muuttujan suhteen.
3. Nolla-alkion tapauksessa $f(\bar{0}, y) = 0 = f(x, \bar{0})$ kun $x, y \in E$, sillä $2f(\bar{0}, y) = f(2 \cdot \bar{0}, y) = f(\bar{0}, y)$.

Hermiten muoto $f : E \times E \to \mathbb{K}$ on *sisätulo* (tai skalaaritulo) avaruudessa E, jos f on lisäksi *aidosti positiivinen* eli

$$f(x, x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E \text{ sekä } f(x, x) = 0 \text{ joss } x = \bar{0}.$$

Sisätulon tapauksessa merkitsemme:

$$(x \,|\, y) = f(x, y), \quad x, y \in E$$
$$\| x \| = \sqrt{(x \,|\, x)}, \quad x \in E.$$

Joskus käytämme sisätulolle myös merkintää $(x\, ,\, y)$.

Vektoriavaruus E on *sisätuloavaruus*, jos E on varustettu sisätulolla $(\cdot \,|\, \cdot)$.

4.2. **Lause** (Cauchy–Schwarzin epäyhtälö)**.** *Sisätuloavaruudessa E pätee*

$$|(\, x \,|\, y \,)| \leq \|\, x \,\|\|\, y \,\| \quad \text{kaikilla } x, y \in E. \tag{CS}$$

Todistus. Voidaan olettaa $x \neq \bar{0}$, $y \neq \bar{0}$ (muuten (CS) on ilmeinen). Jokaisella $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee

$$0 \leq (\, x + \lambda y \,|\, x + \lambda y \,) \overset{(i)-(iii)}{=} (\, x \,|\, x \,) + \lambda(\, y \,|\, x \,) + \overline{\lambda}(\, x \,|\, y \,) + \underbrace{\lambda\overline{\lambda}}_{=|\lambda|^2}(\, y \,|\, y \,)$$

$$\overset{(iii)}{=} \|\, x \,\|^2 + \lambda\overline{(\, x \,|\, y \,)} + \overline{\lambda}(\, x \,|\, y \,) + |\lambda|^2\|\, y \,\|^2.$$

Valitaan $\lambda = -\dfrac{(\, x \,|\, y \,)}{\|\, y \,\|^2}$. (On hyvä huomata, että tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tämä on polynomin $\lambda \mapsto \|\, x \,\|^2 + 2\lambda(\, x \,|\, y \,) + \lambda^2\|\, y \,\|^2$ minimikohta!) Tällä valinnalla edellisestä epäyhtälöstä saadaan

$$\begin{aligned} &0 \leq \|\, x \,\|^2 - \frac{2|(\, x \,|\, y \,)|^2}{\|\, y \,\|^2} + \frac{|(\, x \,|\, y \,)|^2}{\|\, y \,\|^4}\|\, y \,\|^2 = \|\, x \,\|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|\, y \,\|^2} \\ &\iff |(x|y)|^2 \leq \|\, x \,\|^2\|\, y \,\|^2, \end{aligned}$$

mikä osoittaa väitteen. □

4.3. **Seuraus.** *Kuvaus $\|\, x \,\| = \sqrt{(x|x)}$, $x \in E$, on sisätuloavaruuden E normi.*

Todistus. Osoitetaan ensin kolmioepäyhtälö. Suoraan laskemalla ja käyttämällä identiteettiä $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$, joka on voimassa kaikilla kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$, saadaan

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\, x + y \,\|^2 = (\, x + y \,|\, x + y \,) &\overset{(i)-(iii)}{=} \|\, x \,\|^2 + (\, x \,|\, y \,) + (\, y \,|\, x \,) + \|\, y \,\|^2 \\ &= \|\, x \,\|^2 + (\, x \,|\, y \,) + \overline{(\, x \,|\, y \,)} + \|\, y \,\|^2 \\ &= \|\, x \,\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\, x \,|\, y \,) + \|\, y \,\|^2. \end{aligned}$$

Koska kompleksiluvuilla $z \in \mathbb{C}$ on aina $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$, niin edellisen epäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|\, x + y \,\|^2 &\leq \|\, x \,\|^2 + 2|(\, x \,|\, y \,)| + \|\, y \,\|^2 \\ &\overset{\text{(CS)}}{\leq} \|\, x \,\|^2 + 2\|\, x \,\|\|\, y \,\| + \|\, y \,\|^2 = (\|\, x \,\| + \|\, y \,\|)^2. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri saadaan $\|\, x + y \,\| \leq \|\, x \,\| + \|\, y \,\|$, kun $x, y \in E$. Edelleen, kun $x \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, on selvästi voimassa

$$\|\, \lambda x \,\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(\, x \,|\, x \,)} = \sqrt{|\lambda|^2\|\, x \,\|^2} = |\lambda|\|\, x \,\|.$$

Myös ehto (N3) toteutuu, sillä $\|\, x \,\| = \sqrt{(x|x)} = 0$ joss $x = \bar{0}$, sillä $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ on sisätulo. □

4.4. **Määritelmä.** Sanomme, että täydellinen sisätuloavaruus $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ on *Hilbertin avaruus.*

Hilbertin avaruuden nimitys tulee David Hilbertin (1862–1943) mukaan.

4.5. **Esimerkki.**
(1) Jos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, niin kuvaus

$$(\, x \,|\, y \,) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j$$

on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^n$ sisätulo. Vastaava normi

$$\|\, x \,\|_2 = \sqrt{(\, x \,|\, x \,)} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

on avaruuden $\mathbb{K}^n$ tavallinen euklidinen normi ja $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus. Merkitään usein $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2),\ n = 1, 2 \ldots$

(2) Jonoavaruudessa ℓ^2 määritellään sisätulo kaavalla

$$(*) \qquad (x|y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y}_j, \ \text{kun}\ x = (x_k),\ y = (y_k) \in \ell^2.$$

Sisätulon määräämä normi on

$$\|\, x \,\|_2 = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}, \ \text{kun}\ x = (x_k) \ \in \ell^2,$$

eli avaruuden ℓ^2 tavallinen normi, jonka suhteen ℓ^2 on täydellinen (Katso Lause 3.23 sivulla 38). Siis $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ on Hilbertin avaruus.

Huomautus. Jonoavaruuksien Hölderin epäyhtälön 2.20 tai Schwarzin epäyhtälön 2.21 nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \overline{y}_k| \le (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty, \ \text{kun}\ (x_k), (y_k) \in \ell^2,$$

joten sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$ suppenee (itseisesti) $\mathbb{K}$:ssa (ja $(*)$ on järkevä).

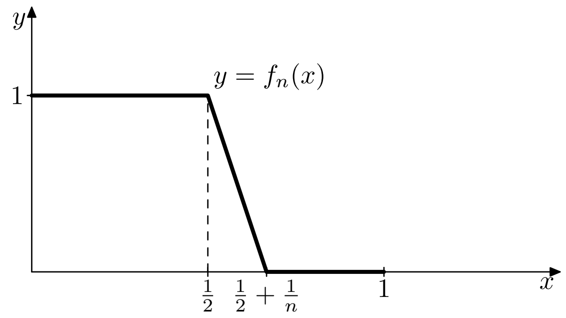
(3) Jos avaruus $C(0,1) = \{\, f \colon [0,1] \to \mathbb{K} : \ f \text{ jatkuva} \,\}$ varustetaan sisätulolla

$$(\, f \,|\, g \,) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, \mathrm{d}t, \qquad f, g \in C(0,1),$$

niin $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole Hilbertin avaruus, missä

$$\|\, f \,\|_2 = (\int_0^1 |f(t)|^2 \ \mathrm{d}t)^{\frac{1}{2}},$$

sillä $(C(0,1), \|\cdot\|_2)$ ei ole täydellinen. Perusteluksi tarkastele seuraava kuvaa ja pohdi, mitä tapahtuu, kun $n \to \infty$.



KUVA 4. Jatkuva funktio f_n, joka approksimoi epäjatkuvaa funktiota $\|\cdot\|_2$-normissa

(4) Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-mitallinen joukko, ja μ n-ulotteinen Lebesgue mitta. Tällöin avaruus $L^2(\Omega)$ varustettuna sisätulolla

$$(f\,|\,g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \quad f,g \in L^2(\Omega), \tag{4.6}$$

on Hilbertin avaruus (normissa $\|f\|_2 = (\int_\Omega |f(x)|^2 d\mu(x))^{\frac{1}{2}}$, vrt. Lause 3.31 sivulla 43.) Huomaa että tulofunktio $x \mapsto f(x)\overline{g(x)}$ on integroituva ja (4.6) on siis hyvin määritelty kun $f, g \in L^2(\Omega)$; tämä seuraa integraalien Hölderin epäyhtälöstä (Lemma 3.25 sivulla 40).

Kun verrataan kahta viimeistä esimerkkiä, käy ilmi, että $C(0,1)$ on tiheä avaruudessa $(L^2(0,1), \|\cdot\|_2)$ ja siten $L^2(0,1)$ on vektoriavaruuden $C(0,1)$ *täydentymä* $\|\cdot\|_2$-normin suhteen. Tämä osoitetaan myöhemmin kurssin aikana (kts. Lause 5.5 luvussa 5).

Alamme sitten setvimään Hilbertin avaruuksien ominaisuuksia. Havaitaan, että (geo)metrisesti ne toimivat kuten kotiavaruus $\mathbb{K}^n$. Emme kuitenkaan voi vedota äärellisulotteisiin ilmiöihin, mutta esimerkiksi kahden annetun vektorin välinen kulma on järkevä Hilbertin avaruudessa:
Jos $x, y \neq \bar{0}$ ovat $\mathbb{R}$-kertoimisen Hilbertin avaruuden E alkioita, niin määrittelemme niiden välisen kulman $\varphi \in [0, 2\pi)$ tutulla kaavalla

$$(x\,|\,y) = \|x\|\,\|y\| \cos\varphi.$$

Olkoon vaikkapa $x = (2^{-n})_1^\infty$ ja $y = (3^{-n})_1^\infty \in \ell^2$. Tällöin (geometrisen sarjan summina)

$$(x\,|\,y) = \sum_{n=1}^\infty x_n\overline{y_n} = \sum_{n=1}^\infty 6^{-n} = 1/5,$$

ja $\|x\|_2 = \sqrt{\sum(2^{-n})^2} = 1/\sqrt{3}$ sekä vastaavasti $\|y\|_2 = 1/\sqrt{8}$. Näin ollen

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{24}}{5} \Rightarrow \varphi \sim 11^o.$$

Funktioiden välisiä kulmia pohdittaessa kaikkein helpoin on tilanne, jossa vektorit ovat kohtisuorassa. Tätä teemaa kannattaa kehittää vähän pitemmällekin:

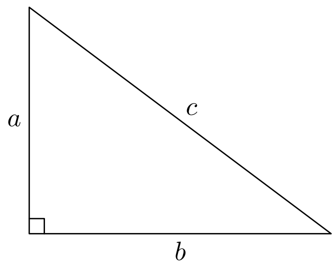
4.7. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden E vektorit $x, y \in E$ ovat *ortogonaaliset* (eli *kohtisuorat*), jos $(\, x \,|\, y \,) = 0$. Ortogonaalisuutta merkitään $x \perp y$. Osajoukot $A, B \subset E$ ovat *ortogonaaliset*, merkitään $A \perp B$, jos $x \perp y$ kaikilla $x \in A$ ja $y \in B$.

Ortogonaalisten vektorien summilla on seuraava tuttu ominaisuus. Hilbertin avaruuksien hajotelmia konstruoitaessa sillä tulee olemaan keskeinen rooli.

4.8. **Lause** (Pythagoras)**.** *Olkoon E sisätuloavaruus. Jos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$ ja vektorit ovat keskenään ortogonaaliset eli $x_j \perp x_k$, kun $j \neq k$, niin*

$$\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2.$$

Huomautus. Kun kolmiossa $a = \| x \|$ ja $b = \| y \|$, niin $c = \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2}$, joten tapaus $n = 2$ on alkeisgeometriasta tuttu lause $a^2 + b^2 = c^2$.



Todistus. Väite osoitetaan induktiolla muuttujan n suhteen. Kun $n = 2$ ja $x_1 \perp x_2$ niin,

$$\| x_1 + x_2 \|^2 = (\, x_1 + x_2 \,|\, x_1 + x_2 \,) = \| x_1 \|^2 + (\, x_1 \,|\, x_2 \,) + (\, x_2 \,|\, x_1 \,) + \| x_2 \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2.$$

Oletetaan, että väite on osoitettu, kun $n = k$. Tällöin kohdan $n = 2$ ja induktio-oletuksen nojalla on voimassa

$$\begin{aligned} \| x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1} \|^2 &= \| x_1 + \cdots + x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2 \\ &\overset{\text{ind.ol.}}{=} \| x_1 \|^2 + \cdots + \| x_k \|^2 + \| x_{k+1} \|^2, \end{aligned}$$

Ensimmäinen yhtäsuuruus on voimassa, sillä oletuksen nojalla

$$(\, x_1 + \cdots + x_k \,|\, x_{k+1} \,) = \sum_{j=1}^{k} (\, x_j \,|\, x_{k+1} \,) = 0,$$

eli $(x_1 + \cdots + x_k) \perp x_{k+1}$. □

Tilanteissa, joissa avaruuden vektoripari ei ole kohtisuorassa, voimme korvata Pythagoraan suunnikasyhtälöllä. (Piirrä ao. lauseesta esimerkkikuva!)

4.9. **Lause** (Suunnikasyhtälö). *Jos E on sisätuloavaruus ja $x, y \in E$, niin*

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).$$

Todistus. Lasketaan suoraan

$$\begin{aligned}
\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 &= (x + y \,|\, x + y) + (x - y \,|\, x - y) \\
&= (x \,|\, x) + (x \,|\, y) + (y \,|\, x) + (y \,|\, y) \\
&+ (x \,|\, x) - (x \,|\, y) - (y \,|\, x) + (y \,|\, y) \\
&= 2(\| x \|^2 + \| y \|^2).
\end{aligned}$$

□

Suunnikasyhtälön avulla voidaan helposti tarkistaa, että monet konkreettiset Banachin avaruudet *eivät* ole Hilbertin avaruuksia (eli normi *ei* voi tulla sisätulosta).

4.10. **Esimerkki.** $(\ell^1, \| \cdot \|_1)$ ja $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia.

Ratkaisu: Olkoon $x = (1, 0, 0, \dots),\ y = (0, 1, 0, \dots)\ \in \ell^1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\| x + y \|_1 &= \| (1, 1, 0, \dots) \|_1 = 2, \\
\| x - y \|_1 &= \| (1, -1, 0, \dots) \|_1 = 2, \\
\| x \|_1 &= \| y \|_1 = 1,
\end{aligned}$$

joten

$$\| x + y \|_1^2 + \| x - y \|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \ \neq 4 = 2(\| x \|_1^2 + \| y \|_1^2).$$

Siispä ℓ^1 ei ole sisätuloavaruus.
Olkoon nyt $f, g \in C(0,1)$ kuvaukset $f(t) = t$ ja $g(t) = 1 - t$ kun $t \in [0,1]$. Tällöin selvästi $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty = 1$. Koska $(f + g)(t) = 1$ ja $(f - g)(t) = 2t - 1$ kun $t \in [0,1]$, niin $\| f + g \|_\infty = \| f - g \|_\infty = 1$. Siis

$$\| f + g \|_\infty^2 + \| f - g \|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2(\| f \|_\infty^2 + \| g \|_\infty^2),$$

eli $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ ei myöskään ole sisätuloavaruus. □

Huomautus. Samoin $(\ell^p, \| \cdot \|_p)$ ja $(L^p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ eivät ole Hilbertin avaruuksia kun $p \neq 2$. (Vrt. HT/5)

Seuraava käsite on keskeinen Hilbertin avaruuksissa.

4.11. **Määritelmä.** Jos $A \subset E$, niin joukon A *ortokomplementti* $A^\perp$ on joukko

$$A^\perp := \{ \, y \in E : \ (x \,|\, y) = 0 \text{ kaikilla } x \in A \, \}.$$

Ortokomplementin ominaisuuksia varten tarvitsemme seuraavan aputuloksen.

4.12. **Lause.** *Sisätulon ehto* $(x,y) \mapsto (\,x\,|\,y\,)$ *määrää jatkuvan kuvauksen* $E \times E \to \mathbb{K}$.

Todistus. Jos $x_0 \in E$ ja $y_0 \in E$, niin kolmioepäyhtälön ja Cauchy–Schwarzin epäyhtälön nojalla, sekä kehittämällä auki $(\,x\,|\,y\,) = (\,x - x_0 + x_0\,|\,y - y_0 + y_0\,)$ saadaan

$$\begin{aligned}|(\,x\,|\,y\,) - (\,x_0\,|\,y_0\,)| &= |(\,x - x_0\,|\,y - y_0\,) + (\,x - x_0\,|\,y_0\,) + (\,x_0\,|\,y - y_0\,)| \\ &\le \|\,x - x_0\,\|\,\|\,y - y_0\,\| + \|\,x_0 - x\,\|\,\|\,y_0\,\| + \|\,x_0\,\|\,\|\,y - y_0\,\|,\end{aligned}$$

missä oikea puoli $\to 0$, kun $x \to x_0$ ja $y \to y_0$. □

Käy ilmi, että monimutkaisenkin osajoukon A ortokomplementti on hyvin säännöllinen:

4.13. **Lause.** *Jos* $A \subset E$, *niin sen ortokomplementti* $A^\perp$ *on avaruuden* E *suljettu aliavaruus.*

Todistus. Joukko $A^\perp$ on avaruuden E aliavaruus: Jos $y_1, y_2 \in A^\perp$ ja $a, b \in \mathbb{K}$, niin

$$(\,x\,|\,ay_1 + by_2\,) = \overline{a}(\,x\,|\,y_1\,) + \overline{b}(\,x\,|\,y_2\,) = 0 + 0 = 0$$

kaikilla $x \in A$, joten $ay_1 + by_2 \in A^\perp$. Siispä $A^\perp$ on aliavaruus.

Seuraavaksi huomataan, että jos $x \in E$ niin $x^\perp \equiv \{x\}^\perp$ on jatkuvan funktion $y \mapsto (\,x\,|\,y\,)$ alkukuva nollasta. Siispä joukko $x^\perp$ on suljettu. Näin ollen mielivaltaisella $A \subset E$,

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} x^\perp$$

on suljettujen joukkojen leikkauksena suljettu. □

Huomautus.

a) Nolla-alkion $\bar{0}$ ortokomplementti on E eli $\{\bar{0}\}^\perp = E$.

b) Koko avaruuden E ortokomplementti on $\{\bar{0}\}$ eli $E^\perp = \{\bar{0}\}$. Nimittäin, jos $y \in E^\perp$, niin $(\,x\,|\,y\,) = 0$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $(\,y\,|\,y\,) = \|\,y\,\|^2 = 0$, joten $y = \bar{0}$.

c) Sama päättely antaa: jos $y \in A \cap A^\perp$, niin $y = \bar{0}$.

Olemme osoittaneet myös seuraavan hyödyllisen havainnon.

4.14. **Lause.** *Jos* $y_1, y_2 \in E$ *ja* $(\,x\,|\,y_1\,) = (\,x\,|\,y_2\,)$ *kaikilla* $x \in E$, *niin* $y_1 = y_2$.

Todistus. Koska $0 = (\, x \mid y_1 - y_2 \,)$ kaikilla $x \in E$, niin $y_1 - y_2 \in E^\perp = \{\bar{0}\}$, eli $y_1 = y_2$. □

Seuraavaksi alamme tarkastella minimointitehtäviä. Näillä on monia sovelluksia, esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä aina käytännön prosessien optimointiin asti. Kun tilanteita mallinnetaan Hilbertin avaruuksilla tulee (usein) tehtäväksi selvittää, millä ehdoin joukoista löytyy normin minimoivia alkioita. Koska avaruutemme ovat ääretönulotteisia, minimien olemassaolo ei ole ollenkaan selvää, kuten seuraava yksinkertainen esimerkki näyttää.

4.15. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \ell^2$; siis jonon n:s termi $= 1$. Jos $A = \{\, \frac{n+2}{n+1} e_n : \ n \in \mathbb{N} \,\}$, tällöin A on suljettu ja rajoitettu, koska $\| \frac{n+2}{n+1} e_n - \frac{m+2}{m+1} e_m \|_2^2 = (\frac{n+2}{n+1})^2 + (\frac{m+2}{m+1})^2 \geq 2$ kun $n \neq m$. Kuitenkaan ei löydy sellaista vektoria $x \in A$, jolle olisi

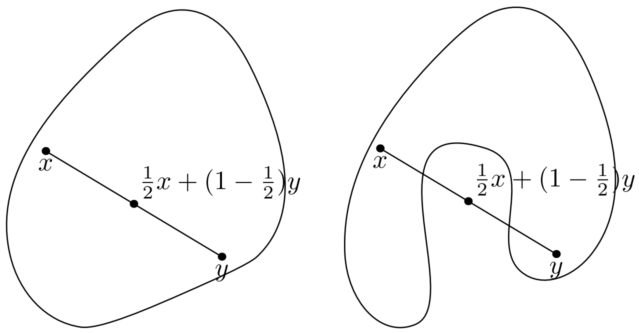
$$\| \, x \, \| = \inf\{ \, \| \, y \, \| : \ y \in A \, \} = 1.$$

Joukkojen kompaktisuus tietysti takaisi minimoivien alkioiden olemassaolon, mutta ääretönulotteisissa avaruuksissa tämä oletus olisi aivan liian rajoittava. On itse asiassa yllättävää, että Hilbertin avaruuksissa minimointitehtävä ratkeaa suhteellisen yleisesti. Olennainen ominaisuus tällaisissa minimointitehtävissä on *konveksisuus.*

Muistetaan, että pisteiden x ja y välinen *yhdysjana* on joukko

$$\{ \, x + t(y - x) : \ t \in [0,1] \, \} = \{ \, tx + (1-t)y : \ t \in [0,1] \, \}.$$

4.16. **Määritelmä.** Vektoriavaruuden E osajoukko A on *konveksi,* jos pisteiden $x, y \in A$ välinen yhdysjana aina sisältyy joukkoon A eli jos $tx + (1-t)y \in A$ aina, kun $x, y \in A$ ja $0 \leq t \leq 1$.



KUVA 5. Konveksi joukko (vasemmalla) ja ei-konveksi joukko (oikealla); Kuvassa myös pisteiden x ja y väliset yhdysjanat.

4.17. **Lause.** *Jos F on Hilbertin avaruuden E konveksi suljettu osajoukko, niin on olemassa* täsmälleen yksi *normin minimoiva alkio $x_0 \in F$, eli alkio $x_0 \in F$ joka toteuttaa ehdon*

$$\| x_0 \| \leq \| x \| \text{ kaikilla } x \in F.$$

Toisin sanoen, $\| x_0 \| = \inf \{\|x\| : x \in F\} = dist(\overline{0}, F)$.

Todistus. Olkoon $\delta = \inf\{ \| x \| : \ x \in F \}$. Sovelletaan suunnikasyhtälöä (4.9) $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2$ vektoreihin $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}y$, kun $x, y \in F$. Tästä seuraa, että

$$\frac{1}{4}\| x-y \|^2 = \frac{1}{2}\| x \|^2 + \frac{1}{2}\| y \|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2.$$

Koska konveksisuuden nojalla $\frac{1}{2}(x+y) \in F$, niin

$$(*) \qquad \| x-y \|^2 \leq 2\| x \|^2 + 2\| y \|^2 - 4\delta^2.$$

Jos nyt $\| x \| = \| y \| = \delta$, niin arvion $(*)$ nojalla $\| x-y \|^2 \leq 0$, joten $x = y$. Siis normin minimoiva alkio on ainakin yksikäsitteinen, jos se on olemassa.

Olemassaoloa varten valitaan sellainen jono $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, että $\| x_n \| \to \delta$, kun $n \to \infty$. Korvataan x ja y arviossa $(*)$ jonon alkioilla x_n ja x_m, josta

$$\| x_n - x_m \|^2 \leq 2\| x_n \|^2 + 2\| x_m \|^2 - 4\delta^2.$$

Silloin $\| x_n - x_m \| \to 0$, kun $n, m \to \infty$. Siispä $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono Hilbertin avaruudessa E, joten on olemassa $x_0 \in E$ jolle $x_n \to x_0 \in E$, kun $n \to \infty$. Koska normi $\| \cdot \|$ on jatkuva funktio, niin

$$\| x_0 \| = \lim_{n \to \infty} \| x_n \| = \delta.$$

Koska F on suljettu ja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset F$, niin raja-alkio $x_0 \in F$. □

Edellinen lause voidaan muotoilla myös invariantisti, niin ettei origolla ole erikoisasemaa.

4.18. **Seuraus.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, F sen suljettu konveksi osajoukko sekä $x \in E$. Silloin on täsmälleen yksi alkio $y_0 \in F$, jolle*

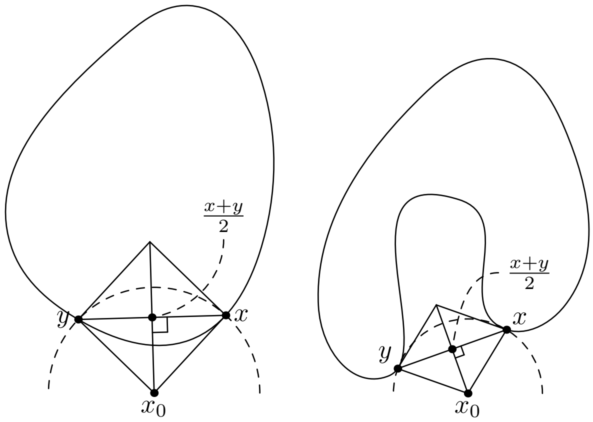
$$\| x - y_0 \| = \mathrm{dist}(x, F).$$

Tässä $\mathrm{dist}(x, F) = \inf\{ \| x-y \| : \ y \in F \}$ *on x:n etäisyys F:stä.*

Todistus. Joukko $x - F$ on suljettu ja konveksi (tarkista!), sekä

$$\min\{ \| x-y \| : \ x-y \in x-F \} = \min\{ \| x-y \| : \ y \in F \}.$$

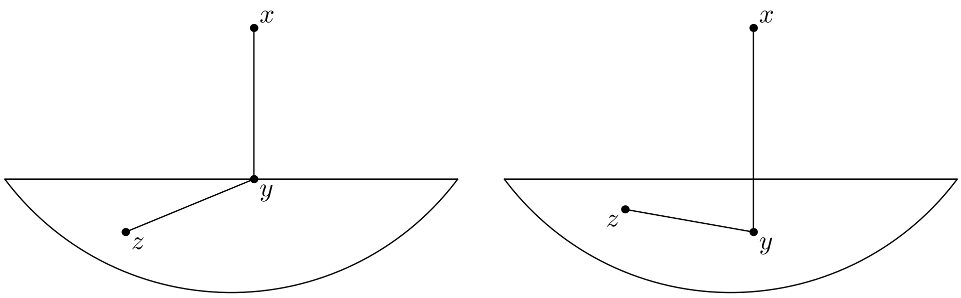
Nyt väite seuraa suoraan Lauseesta 4.17. □



KUVA 6. Minimointiongelman yksikäsitteisyyden geometrinen ajatus konveksille joukolle (vasemmalla) ja ei-konveksille joukolle (oikealla)

Yo. lauseilla on suoraan sovelluksia konveksissa optimoinnissa, mutta niitä voidaan käyttää monissa muissakin minimointitehtävissä, esim. variaatiolaskennassa.

Olemme todistaneet minimoivan alkion y_0 olemassaolon ja yksikäsitteisyyden, mutta se voidaan myös helposti tunnistaa ! Seuraava lause kertoo, että $\| x - y \| = \mathrm{dist}(x, F)$ jos ja vain jos vektoreiden $x - y$ ja $z - y$ välinen kulma on tylppä kaikilla $z \in F$.
[Muista, että ($\mathbb{R}$-kertoimisessa) Hilbertin avaruudessa kahden vektorin a ja b välinen kulma $\varphi \in [0, 2\pi)$ saatiin ehdosta $(\, a \,|\, b \,) = \| a \| \| b \| \cos \varphi$.]



KUVA 7. vasemmalla tylppä kulma; oikealla terävä

4.19. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus sekä $F \subset E$ sen suljettu konveksi ja epätyhjä osajoukko. Olkoon myös $x \in E$ ja $y \in F$. Tällöin*

$$\| x - y \| = \mathrm{dist}(x, F) \quad \Leftrightarrow \quad Re\,(\, x - y \,|\, z - y \,) \le 0 \quad \textit{kaikilla } z \in F.$$

Todistus. Olkoon $\| x - y \| = \mathrm{dist}(x, F)$. Jos $z \in F$ ja $0 < \lambda < 1$, niin konveksisuuden nojalla $y + \lambda(z - y) = (1 - \lambda)y + \lambda z \in F$. Siispä

$$\| x - y - \lambda(z - y) \|^2 \ge \| x - y \|^2,$$

josta kehittämällä vasen puoli auki sisätulon avulla saadaan

$$\| x - y \|^2 - 2\lambda \operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) + |\lambda|^2 \| z - y \|^2 \geq \| x - y \|^2 .$$

Saamme tästä $\operatorname{Re}(x-y \,|\, z-y) \leq (\lambda/2)\| z-y \|^2$ kaikilla $0 < \lambda < 1$. Antamalla $\lambda \to 0$ nähdään, että $\operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) \leq 0$.

Kääntäen, oletetaan että $\operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y) \leq 0$ kaikilla $z \in F$. Tällöin

$$\begin{aligned}\| x - z \|^2 &= \| x - y - (z - y) \|^2 \\ &= \| x - y \|^2 - 2 \operatorname{Re} (x - y \,|\, y - z) + \| z - y \|^2 \\ &\geq \| x - y \|^2\end{aligned}$$

kaikilla $z \in F$. Silloin y on normin minimoiva alkio, joten $\| x-y \| = \operatorname{dist}(x, F)$. Lause on näin todistettu. □

Ortogonaaliset projektiot

Sovellamme seuraavaksi minimointilausetta 4.18 tapaukseen, missä F on suljettu vektorialiavaruus. Tämä johtaa ortoprojektioihin, jotka tulevat olemaan lineaarisia kuvauksia.

4.20. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja M sen suljettu vektorialiavaruus. Kun $x \in E$ ja $y \in M$,*

$$\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M) \quad \Leftrightarrow \quad (x - y) \perp M.$$

Todistus. Olkoon ensin $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M)$. Jos $z \in M$ sekä $\lambda \in \mathbb{K}$, niin lineaarinen kombinaatio $y + \lambda z \in M$ (koska M on vektorialiavaruus), ja Lauseen 4.19 nojalla

$$0 \geq \operatorname{Re} ((x - y \,|\, (y + \lambda z) - y)) = \operatorname{Re} \big(\overline{\lambda}(x - y \,|\, z) \big)$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Kun valitaan $\lambda = (x - y \,|\, z)$, niin tästä seuraa, että

$$|(x - y \,|\, z)|^2 \leq 0$$

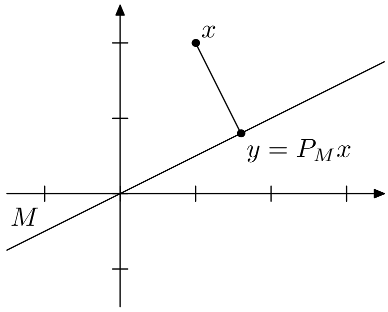
eli $(x - y \,|\, z) = 0$ kaikilla $z \in M$. Toisin sanoen, $x - y \in M^{\perp}$.

Kääntäen, oletetaan nyt, että $x - y \in M^{\perp}$. Jos $z \in M$, niin $z - y \in M$ ja siten $0 = \operatorname{Re} (x - y \,|\, z - y)$ kaikilla $z \in M$. Lauseen 4.19 nojalla tästä seuraa, että $\| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M)$. □

Kun M on avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, olkoon $P_M \colon E \to E$ kuvaus, joka liittää vektoriin x sen yksikäsitteisen vektorin $y \in M$, joka minimoi x:n etäisyyden M:ään. Siis

(4.21) $$P_M(x) = y \,, \qquad \text{kun} \;\; \| x - y \| = \operatorname{dist}(x, M).$$

Sanomme, että kuvaus P_M on avaruuden E *ortoprojektio* aliavaruudelle M ja $y = P_M x$ on vektorin x ortoprojektio avaruudelle M.



Huomautus. Havaitaan lisäksi, että Lause 4.20 antaa seuraavanlaisen tavan karakterisoida vektorin x ortoprojektio:

$$y = P_M x \quad \text{joss} \quad y \in M \ \text{ ja } \ x - y \perp M. \tag{4.22}$$

Toisin sanoen, ehdon (4.22) mukaan ortoprojektion määräävät seuraavat kaksi ehtoa,

$$P_M x \in M \quad \text{ja} \quad x - P_M x \in M^\perp, \tag{4.23}$$

jotka ovat siis voimassa kaikilla Hilbert avaruuden E vektoreilla x.

Ylläolevista tuloksista saadaan erityisesti

$$P_M x = \bar{0} \ \text{ kun } x \in M^\perp, \quad P_M x = x \ \text{ kun } x \in M. \tag{4.24}$$

Jos nimittäin $x \in M^\perp$, niin $P_M x = (P_M x - x) + x \in M^\perp$, ja siis $P_M x \in M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$. Jälkimmäinen väite seuraa suoraan määritelmästä (4.21).

Määrittelimme yllä ortoprojektion puhtaasti *metrisenä* suureena, mutta Hilbert avaruuden vektoriavaruus-struktuurin takia päädymme lineaariseen operaattoriin.

4.25. **Lause.** *Olkoon M suljettu vektorialiavaruus Hilbertin avaruudessa E. Silloin ortoprojektio $P_M : E \to E$ on lineaarinen kuvaus.*

Todistus. Lineaarisuuden havaitsemiseksi käytetään esitystä

$$x + \lambda y = \underbrace{P_M x + \lambda P_M y}_{:= z \in M} + \underbrace{(x - P_M x) + \lambda(y - P_M y)}_{\in M^\perp},$$

kun $x, y \in E$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$. Esityksestä nähdään, että $x + \lambda y - z \perp M$ ja $z \in M$, joten ehdon (4.22) nojalla $P_M(x+\lambda y) = z = P_M x + \lambda P_M y$. Siis P_M on lineaarinen.

$\square$

Lineaarialgebrasta muistamme, että lineaarikuvaus $P\colon E \to E$ on *projektio*, jos $P^2 = P$. (Tässä $P^2 = P \circ P$.) Mikäli $U = P(E)$ ja $V = \ker P = \{x \in E : Px = \overline{0}\}$, sanomme että P on projektio *avaruudelle* U *suuntaan* V.

Läheinen lineaarialgebran käsite on nk. suora summa. Sanomme, että E on aliavaruuksien U ja V *suora summa*, merkitään $E = U \oplus V$, jos

$$E = U + V = \{u + v : u \in U, v \in V\}, \text{ ja } U \cap V = \{\bar{0}\}.$$

Voidaan osoittaa, että jos P on projektio avaruudelle U suuntaan V, niin $E = U \oplus V$. (Nimittäin: jos $x \in E$, niin $x = Px + (x - Px)$, missä $Px \in U = P(E)$ ja $x - Px \in \ker(P) = V$.) Kääntäen, jos $E = U \oplus V$, niin suora summa määrittelee projektion P avaruudelle U suuntaan V. Nimittäin silloin jokaisella $x \in E$ on yksikäsitteinen esitys $x = u + v$, missä $u \in U$ ja $v \in V$. Asetetaan tällöin $P(x) = u$; nyt $U = P(E)$ ja $V = \ker P$ [Näiden väitteiden (helpot) yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi].

4.26. **Lause.** *Jos M on Hilbertin avaruuden E suljettu vektorialiavaruus, niin $E = M \oplus M^\perp$ ja P_M on avaruuden E projektio aliavaruudelle M suuntaan $M^\perp$. Lisäksi*

$$\| P_M x \| \le \| x \| \quad \textit{kaikilla } x \in E,$$

joten P_M on jatkuva lineaarinen operaattori.

Todistus. Lauseesta 4.13 sivulla 61 muistetaan, että $M^\perp$ on avaruuden E vektorialiavaruus. Lisäksi (4.23) osoitti että jokainen $x \in E$ voidaan hajottaa summaksi $x = P_M x + x - P_M x$, missä $P_M x \in M$ ja $x - P_M \in M^\perp$. Siis $E = M + M^\perp$. Lisäksi, jos $x \in M \cap M^\perp$, niin $\| x \|^2 = (x \,|\, x) = 0$, joten $x = \bar{0}$. Siispä $M \cap M^\perp = \{\bar{0}\}$ ja $E = M \oplus M^\perp$ on siten suora summa.

Seuraavaksi tarkastellaan esitystä $x = P_M x + z$, missä $z = x - P_M x \in M^\perp$. Koska edellä havaitsimme että $P_M z = \bar{0}$, niin lineaarisuuden avulla saadaan

$$P_M x = P_M(P_M x + z) = P_M^2 x + P_M z = P_M^2 x.$$

Siis P_M on projektio. Ehto $P_M(E) = M$ seuraa kaavasta (4.22) [valitaan $y = x$], samoin ehto $\ker(P_M) = M^\perp$ [kun valitaan $y = 0$].

Lopuksi, normiarviota varten käytetään Pythagoras'n lausetta (Lause 4.8),

$$\| x \|^2 = \| P_M x + (x - P_M x) \|^2 = \| P_M x \| + \| x - P_M x \|^2 \ge \| P_M x \|^2,$$

joten väite seuraa. □

4.27. *Huomautus.* (1) Lauseesta 4.26 seuraa myös, että itse asiassa $\| P_M \| = 1$ kun $M \ne E$ (Miksi ? !).

(2) Olkoon yleisemmin $F \subset E$ suljettu konveksi joukko. Seurauksen 4.18 nojalla on olemassa sellainen *metrinen projektio* $P_F : E \to E$, että jokaisella $x \in E$

pätee $P_F(x) = y$, missä $y \in F$ on se yksikäsitteinen vektori jolle $\|x - y\| = dist(x, F)$. Metrinen projektio P_F ei yleensä ole lineaarikuvaus, mutta se on kuitenkin aina *kontraktio* (vrt. HT/6):

$$\|P_F(u) - P_F(v)\| \leq \|u - v\| \quad \text{kaikilla } u, v \in E.$$

Ortonormaalit kannat

4.28. **Määritelmä.** Sisätuloavaruuden jono (e_n) on *ortonormaali* (tai *ortonormitettu*), jos

$$(\, e_i \mid e_j \,) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Toisin sanoen, jono (e_j) on ortonormaali, jos $e_i \perp e_j$ aina kun $i \neq j$ ja $\|\, e_j \,\| = 1$ jokaisella j.

4.29. **Esimerkki.**
(1) Kanoniset kantavektorit $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \ell^2$, missä nollasta eroava termi on n:s, $n \in \mathbb{N}$, muodostavat ortonormaalin jonon avaruudessa ℓ^2.

(2) $E = L^2(0, 2\pi)$ varustettuna sisätulolla

$$(\, x \mid y \,) = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t,$$

on Hilbertin avaruus; jono (x_n),

$$x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\cos(nt) + i\sin(nt)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

on ortonormitettu jono avaruudessa E. Nimittäin, jos $n \neq m$ niin

$$(\, x_n \mid x_m \,) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i2\pi(n-m)}(e^{i(n-m)2\pi} - e^{i(n-m)0}) = 0.$$

Ortonormaaleja jonoja ja niiden määräämiä vektorisummia voi helposti kontrolloida tärkeän *Besselin epäyhtälön* avulla.

Lause (Besselin epäyhtälö)**.** *Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E, niin*

$$\text{(B)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |(\, x \mid e_k \,)|^2 \leq \|\, x \,\|^2$$

kaikilla $x \in E$. Erityisesti,

$$\lim_{k \to \infty} (\, x \mid e_k \,) = 0.$$

Todistus. Jos (e_n) on ortonormaali jono avaruudessa E ja $x \in E$, niin tarkastellaan ensin äärellisiä osasummia. Ottamalla sisätulo termeittäin saadaan

$$(4.30)\qquad \begin{aligned}(\, x - \sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \;|\, e_j \,) &= (\, x \,|\, e_j \,) - \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)(\, e_k \,|\, e_j \,) \\ &= (\, x \,|\, e_j \,) - (\, x \,|\, e_j \,) = 0,\end{aligned}$$

kun $j = 1, \ldots, n$. Näin $x - \sum_{k=0}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k$ on kohtisuorassa vektoreita e_j vastaan kaikilla $1 \le j \le n$, ja siis $x - \sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \perp \sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k$ (muista: ortokomplementti on vektorialiavaruus). Siten Pythagoraan lauseen mukaan

$$(4.31)\qquad \begin{aligned}\|\, x \,\|^2 &= \Big\| x - \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \Big\|^2 + \Big\| \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \Big\|^2 \\ &\ge \Big\| \textstyle\sum_{k=1}^{n}(\, x \,|\, e_k \,)e_k \Big\|^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{n}|(\, x \,|\, e_k \,)|^2\end{aligned}$$

Edellä myös viimeinen yhtäsuuruus perustui Pythagoraan lauseeseen (ja siihen että vektorit e_j ovat ortonormeerattuja, $\|\, e_j \,\| = 1$ jokaisella j).

Olemme siis näyttäneet, että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\sum_{k=1}^{n}|(\, x \,|\, e_k \,)|^2 \le \|\, x \,\|^2.$$

Antamalla lopuksi $n \to \infty$ saadaan Besselin epäyhtälö (B). □

Huomautus. Besselin epäyhtälö (4.30) pätee myös äärelliselle ortonormaalille jonolle $(e_1, \ldots, e_m) \subset E$. (Todistus kuten yllä ilman vaihetta $n \to \infty$.)

4.32. **Määritelmä.** Jos (e_n) on ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E ja $x \in E$, niin lukuja $(\, x \,|\, e_k \,)$ sanotaan vektorin x *Fourier-kertoimiksi* jonon (e_n) suhteen.

Jos E on vektoriavaruus ja $A \subset E$, niin merkitään span$\,(A)$:lla joukon A virittämää avaruuden E vektorialiavaruutta, eli

$$\mathrm{span}\,(A) := \{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i : \; n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A \}.$$

Edelleen $\overline{\mathrm{span}}\,(A)$ on aliavaruuden span$\,(A)$ sulkeuma avaruudessa E.

Olkoon $(e_1, \ldots, e_n)$ äärellinen ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E. Seuraava tulos antaa hyödyllisen kaavan ortoprojektiolle vektoreiden $e_1, \ldots, e_n$ virittämälle aliavaruudelle.

4.33. **Lause.** *Olkoon E Hilbertin avaruus, $(e_j)_{j=1}^{n} \subset$ äärellinen ortonormaali jono sekä $M = span(\{e_1, \ldots, e_n\})$. Tällöin*

a) M on suljettu E:n vektorialiavaruus, eli $M = \overline{span}\,(\{e_1, \ldots, e_n\})$.

b) M:n ortoprojektiolla $P = P_M$ on seuraava konkreettinen esitys,

$$Px = \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k, \quad x \in E \tag{4.34}$$

Todistus. Kaavan (4.34) määrittelemä kuvaus P on selvästi lineaarinen. Lisäksi Pythagoraan ja Besselin epäyhtälön nojalla $\| \, Px \, \|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(\, x \,|\, e_k \,)|^2 \le \| \, x \, \|^2$ kun $x \in E$, joten P on jatkuva.

Toisaalta, jos $x \in M$, niin

$$x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \, e_k$$

joillakin skalaareilla $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Ottamalla tästä sisätulo e_j:n kanssa, saadaan ortogonaalisuuden nojalla $\lambda_j = (\, x \,|\, e_j \,)$, $j = 1, \dots, n$. Mutta tämä sanoo, että $Px = x$ jokaisella $x \in M$. Niinpä

$$M \;=\; \{x \in E : Px = x\} \;=\; \ker(I - P)$$

missä I on avaruuden E identtinen kuvaus. Jatkuva lineaarikuvauksen $I - P$ ytimenä M on näin ollen suljettu v.a.a.

Lopuksi, kuten yhtälössä (4.30) nähdään, että

$$e_j \perp \Big(x - \sum_{k=1}^{n} (\, x \,|\, e_k \,)\, e_k \Big) = 0, \qquad j = 1, \dots, n,$$

eli yhtäpitävästi $x - Px \in M^{\perp}$, $x \in E$. Mutta Lauseen 4.20 mukaan ehdot $Px \in M$ ja $x - Px \in M^{\perp}$ karakterisoivat ortoprojektion; vrt. myös (4.22). Olemme näin todistaneet myös väitteen b). $\square$

4.35. *Huomautus.* a) Pätee yleisesti: Jokaisessa Banachin avaruudessa jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu [Tähän (ehkä) palataan myöhemmin].

b) Lineaarialgebran kurssilta tunnetulla Gramm-Schmidtin menetelmällä jokaiseen Hilbert-avaruuden äärellisulotteiseen aliavaruuteen M voidaan konstruoida ortonormaali kanta; tällöin Lause 4.33 antaa konkreettisen lausekkeen M:n ortoprojektiolle; vrt. myös Harjoitukset 6.

c) Voimme nyt yhdistää Lauseet 4.20 ja 4.33, ja saamme seuraavan tulkinnan: Jokaisella $x \in E$, funktio

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \Big\| \, x - \sum_{1}^{n} \lambda_k e_k \, \Big\|$$

saa pienimmän arvonsa *täsmälleen* (!) silloin, kun

$$\lambda_k = (\, x \,|\, e_k \,), \quad k = 1, \dots, n.$$

Kyseinen pienin arvo on $\Big\| \, x - \sum_{1}^{n} \lambda_k e_k \, \Big\| = dist(x, M)$.

Edelleen, ortonormaaleista vektoreista muodostettujen sarjojen summautuminen riippuu vain kerroinjonon ominaisuuksista (yleisissä Banach-avaruus summissa tilanne ei ole lainkaan yhtä helppo):

4.36. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa E. Jos $\lambda_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin*

$$\textit{sarja } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \textit{ suppenee jos ja vain jos } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty.$$

Tällöin pätee

$$\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

Todistus. Olkoon $s_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ sarjan n:s osasumma kun $n = 1, 2, \ldots$. Tällöin määritelmän ja täydellisyyden nojalla sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee jos ja vain jos (s_n) on Cauchyn jono.

Olkoon tätä varten $p, q \in \mathbb{N}$ ja $p < q$, jolloin Pythagoras'n lauseen nojalla

$$\Big\| \sum_{k=1}^{q} \lambda_k e_k - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_{k=p+1}^{q} \lambda_k e_k \Big\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} |\lambda_k|^2.$$

Siispä osasummat (s_n) muodostavat Cauchyn jonon avaruudessa E jos ja vain jos positiiviterminen sarja $\sum_k |\lambda_k|^2$ suppenee. Tämä osoittaa väitteen ensimmäisen osan. Jos nyt

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k,$$

niin sisätulon jatkuvuuden ja ortonormaalisuuden nojalla

$$(\, x \mid e_j \,) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \;\Big|\; e_j \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\, e_k \mid e_j \,) = \lambda_j,$$

mistä samoin

$$\| \, x \, \|^2 = (\, x \mid x \,) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \;\Big|\; x \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\, e_k \mid x \,) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_k = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k|^2.$$

□

4.37. **Seuraus** (Riesz–Fischerin lause)**.** *Olkoon E Hilbertin avaruus ja $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortonormaali jono. Jos $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$, niin löytyy sellainen $x \in E$, että*

$$(\, x \mid e_k \,) = \lambda_k \,, \qquad \textit{kaikilla } k \in \mathbb{N}.$$

Todistus. Lauseen 4.36 nojalla $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ suppenee E:ssa, ja Fourier kertoimet $(\, x \mid e_k \,) = \lambda_k$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ (vrt. edellä Lauseen 4.36 todistus). □

4.38. **Määritelmä.** Hilbertin avaruuden E ortonormaali jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Hilbertin kanta* (tai *ortonormaali kanta*) avaruudessa E, jos

$$\overline{\mathrm{span}}\,(\{\, e_n :\ n \in \mathbb{N}\,\}) = E.$$

Huomautus. Jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta jos ja vain jos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E.

Todistus. Jos $M = \overline{\mathrm{span}}\,(\{\, e_n :\ n \in N\,\})$, niin $M \neq E \iff M^\perp \neq \{\bar{0}\}$ (muista: $E = M \oplus M^\perp$ Lauseen 4.26 nojalla). Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että löytyy $x \in M^\perp$, jolle $\|\, x\,\| = 1$. Tämä on edelleen yhtäpitävää sen kanssa, että joukko $\{x\} \cup \{\, e_n :\ n \in \mathbb{N}\,\}$ on ortonormaali $\iff$ M ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko avaruudessa E. □

Seuraava lause on keskeinen Hilbertin avaruuksien teoriassa ja sovelluksissa.

4.39. **Lause.** *Olkoon $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa E. Silloin seuraavat viisi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

a) jono $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on Hilbertin kanta avaruudessa E,

b) sisätulot $(\, x \mid e_n\,) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ jos ja vain jos $x = \bar{0}$,

c) jokaisella $x \in E$ on $x = \sum_{n=1}^\infty (\, x \mid e_n\,)\, e_n$, [suppeneminen normin mielessä]

d) jokaisella $x \in E$ on voimassa

$$\|\, x\,\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |(\, x \mid e_n\,)|^2,$$

e) jokaisella $x, y \in E$ on voimassa

$$(\, x \mid y\,) = \sum_{n=1}^\infty (\, x \mid e_n\,)\overline{(\, y \mid e_n\,)}.$$

Huomautus. (1) Ehtoa d) sanotaan *Parsevalin yhtälöksi* ja ehtoa e) *Plancherelin kaavaksi*. (Kirjallisuudessa on terminologiassa vaihtelua: joskus sekä ehtoa d) että e) kutsutaan Parsevalin yhtälöiksi.) Kohdassa c) suppeneminen taas tarkoittaa, että jokaisella $x \in E$ pätee

$$\|\, x - \sum_{n=1}^N (\, x \mid e_n\,)\, e_n\,\| \to 0, \quad \text{kun } N \to \infty.$$

(2) Vastaavanlainen karakterisaatio pätee kun $dim(E) = m$ ja $(e_1, \ldots, e_m) \subset E$ on ortonormaali jono. (Ehdoissa c) - e) summataan silloin 1:stä m:ään.) Todistus on helpompi variaatio allaolevasta.

Todistus. Havaitaan aluksi että jokaisella joukolla $A \subset E$ pätee

$$(\overline{A})^{\perp} = A^{\perp},$$

missä $\overline{A}$ on A:n sulkeuma. Nimittäin, jos $x \in A^{\perp} = \{x \in E : (\,x\,|\,a\,) = 0 \; \forall\, a \in A\}$ niin sisätulon jatkuvuuden nojalla myös $(\,x\,|\,a\,) = 0$ kaikilla $a \in \overline{A}$, eli $x \in (\overline{A})^{\perp}$. Toisaalta, käänteinen inkluusio $(\overline{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$ on selvä. Erityisesti, jos $M = \overline{\operatorname{span}}\,(\{e_n : n \in \mathbb{N}\})$, niin b) on yhtäpitävää ehdon $M^{\perp} = \{\bar{0}\}$ kanssa. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa että $M = E$, vrt. Lause 4.26. Toisin sanoen, a) ja b) ovat yhtäpitäviä.

Helposti havaitaan, että

$$e\,) \implies d\,) \implies b\,).$$

Käänteiseen suuntaan osoitetaan ensin, että ehto b) implikoi c):n. Oletetaan siis, että ehto b) on voimassa. Jos $x \in E$, niin olkoon

$$\widehat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (\,x\,|\,e_n\,)\, e_n,$$

missä oikeanpuoleinen sarja suppenee avaruudessa E Besselin epäyhtälön ja Lauseen 4.36 nojalla. Nyt kaikilla $k \in \mathbb{N}$

$$(\,\widehat{x}\,|\,e_k\,) = \lim_{N \to \infty} \Big(\, \sum_{n=1}^{N} (\,x\,|\,e_n\,)\, e_n \;\Big|\; e_k \Big) = (\,x\,|\,e_k\,)$$

eli $(\,\widehat{x} - x\,|\,e_k\,) = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten ehdon b) nojalla $x = \widehat{x}$. Olemme siis näyttäneet, että c) pätee.

Lopuksi, näytetään $c\,) \implies e\,)$. Koska oletuksen mukaan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (\,x\,|\,e_n\,)\, e_n$$

kaikilla $x \in E$, on siis taas jatkuvuuden ja lineaarisuuden perusteella

$$\begin{aligned}(\,x\,|\,y\,) &= \lim_{N \to \infty} \Big(\, \sum_{n=1}^{N} (\,x\,|\,e_n\,)\, e_n \;\Big|\; y \Big) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} (\,x\,|\,e_n\,)(\,e_n\,|\,y\,) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\,x\,|\,e_n\,)(\,e_n\,|\,y\,) = \sum_{n=1}^{\infty} (\,x\,|\,e_n\,)\overline{(\,y\,|\,e_n\,)}.\end{aligned}$$

□

Jos Hilbertin avaruudessa E ylipäätään on Hilbertin kanta, niin selvästi E on separoituva. Käy ilmi että tämä onkin ainoa rajoite Hilbertin kannan löytymiselle.

4.40. **Lause.** *Jokaisessa separoituvassa Hilbertin avaruudessa E on Hilbertin kanta.*

Todistus. (1) Oletetaan, että $\dim E = n < \infty$. Silloin avaruudella E on lineaarinen kanta $(x_1, \ldots, x_n)$. Käyttämällä Lineaarialgebrasta tuttua *Gramm-Schmidtin menetelmää* voidaan tästä kannasta konstruoida uusi, ortonormaali kanta. Tämä on tehty yksityiskohtaisesti esim. Honkasalon monisteessa s. 70, Lauseessa 3.3.3.

Kertaamme tässä lyhyesti Gramm-Schmidtin konstruktion: Olkoon

$$M_q = \operatorname{span}(\{\, x_j : \ 1 \le j \le q \,\})$$

ja merkitään $e_1 = \| x_1 \|^{-1} x_1$. Osoitetaan induktiolla luvun q suhteen, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta jokaisella $q = 1, \ldots, n$. Väite seuraa tästä, kun $q = n$.

Tapaus $n = 1$ on selvä, joten oletetaan, että avaruudella M_q on ortonormaali kanta $(e_1, \ldots, e_q)$. Merkitään $y_{q+1} = x_{q+1} - P_q x_{q+1}$, missä P_q on avaruuden E ortoprojektio aliavaruudelle M_q. Koska jono $(x_1, \ldots, x_n)$ on lineaarisesti vapaa, tiedämme että $x_{q+1} \notin M_q$ joten $y_{q+1} \neq \bar{0}$ ja $y_{q+1} \perp M_{q+1}$ Lauseen 4.20 mukaan. Merkitään $e_{q+1} = \| y_{q+1} \|^{-1} y_{q+1}$. Tällöin induktio-oletuksen nojalla joukko $\{e_1, \ldots, e_{q+1}\}$ muodostaa avaruuden M_{q+1} ortonormaalin kannan. Siispä väite on osoitettu.

(2) Oletetaan sitten, että $\dim E = \infty$. Koska E on separoituva, voimme löytää tiheän jonon $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Konstruoidaan induktiolla sellainen osajono (x_{k_j}), että kaikilla $p \in \mathbb{N}$ on voimassa:

(i) joukko $\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}\}$ on lineaarisesti vapaa, ja

(ii) $x_m \in \operatorname{span}(\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}\})$ aina, kun $1 \le m \le k_p$.

[*Konstruktio:* Jos $k_1 < \ldots < k_p$ on löydetty, olkoon $k_{p+1} > k_p$ pienin luonnollinen luku $m > k_p$ jolle $\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}, x_m\}$ on vapaa joukko. Tällöin myös

$$x_r \in \mathit{span}(\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}, x_{k_{p+1}}\})$$

kun $k_p < r < k_{p+1}$. Nimittäin: valinnan perusteella on $c x_r + \sum_{j=1}^{p} c_j x_{k_j} = \bar{0}$ jollakin $c \neq 0$ (miksi?)]

Merkitään $y_j = x_{k_j}$. Soveltamalla kohdan (1) ortonormeeraus-tekniikkaa jonoon (y_k) saamme konstruoitua avaruuteen E Hilbertin kannan. (Tarkemmat lineaarialgebralliset yksityiskohdat vapaa HT.) $\square$

Olkoon $(e_j)_{j \in \mathcal{J}}$ separoituva Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta, missä $\mathcal{J} = \mathbb{N}$ tai $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$. Tällöin jokaisella $x \in E$ on esitys

$$x = \sum_{k \in \mathcal{J}} (\, x \mid e_k \,)\, e_k.$$

Olkoon nyt $\mathcal{J} = \mathbb{N}$. Määritellään lineaarikuvaus $T\colon \ell^2 \to E$ asettaen

$$T\big((\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k e_k, \quad (\lambda_k) \in \ell^2.$$

Tällöin T on lineaarinen *isomorphismi* $\ell^2 \to E$. Nimittäin: Lauseen 4.36 nojalla

$$\| Tx - Ty \| = \| \sum_k (x_k - y_k) e_k \| = (\sum_k |x_k - y_k|^2)^{1/2} = \|x - y\|_2$$

kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$. Lisäksi T on lineaarinen bijektio Lauseiden 4.36 ja 4.39 perusteella (tarkista!).
Tapauksessa $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$ saadaan lineaarikuvaus $T\colon \mathbb{K}^n \to E$ ehdolla

$$T\big((\lambda_k)_{k\in\mathcal{J}}\big) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k.$$

Samoin tässäkin T on lineaarinen isomorfismi $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2) \to E$.

Yhteenvetona siis kaikki separoituvat Hilbertin avaruudet ovat isomorfismia vaille joko tyyppiä ℓ^2 tai $\ell_2^n = (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$!

4.41. **Esimerkkejä.**
(1) Olkoon $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in \ell^2$ (ykkönen n:nnessa kohdassa) kun $n = 1, 2, \ldots$. Tällöin (e_n) on jonoavaruuden ℓ^2 ON kanta: jos $x = (x_n) \in \ell^2$ ja $0 = (\,x \,|\, e_n\,) = x_n$ kaikilla n, niin $x = \overline{0}$. (Lause 4.39, ehto b))

(2) *Haarin systeemi* $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ on ehkä helpoin tapa konstruoida Hilbertin kanta avaruuteen $L^2\,[0,1]$. (Tässä reealikertoiminen avaruus $L^2\,[0,1]$ koostuu 2-integroituvista funktioista $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, joille $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty$.) Lähdemme liikkeelle välin $[0,1]$ karakteristisesta funktiosta ja valitsemme $h_0(x) = \chi_{[0,1]}(x)$, joka $= 1$, jos $x \in\ [0,1]$ ja $= 0$, jos $x \notin\ [0,1]$. Selvästi $\|\, h_0 \,\|_2 = 1$.

Muut kantafunktiot valitaan seuraavasti: Jos $0 \le j < 2^k$, olkoon $n = 2^k + j$ ja

$$\Delta_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \subset [0,1],$$
$$\Delta_n^+ = \left(\frac{j}{2^k}, \frac{j+1/2}{2^k}\right), \quad \Delta_n^- = \left(\frac{j+1/2}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right).$$

Asetetaan

$$h_n(t) = 2^{\frac{k}{2}} \left(\chi_{\Delta_n^+}(t) - \chi_{\Delta_n^-}(t)\right) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^+ \\ -2^{\frac{k}{2}}, & t \in \Delta_n^- \\ 0, & t \notin \Delta_n^+ \cup \Delta_n^- \end{cases}$$

kun $n = 1, 2, 3, \ldots,\ n = 2^k + j$ kuten edellä.
(Piirrä itsellesi neljän ensimmäisen Haarin funktion $h_0, \ldots, h_4$ kuvaajat !)

Näin muodostettu Haarin systeemi $(h_n(x))_{n=1}^{\infty} \subset L^2\,[0,1]$ on Hilbertin kanta. [Yksityiskohdat pitkähkö HT; tässä luonnosteltuna idea (vrt. myös HT/7): Dyadisten välien Δ_k karakteristiset funktiot

$$\chi_{\Delta_k} \in \operatorname{span}(\{\ h_n :\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \}) \subset L^2\,[0,1]$$

kaikilla k (Miksi ?); tästä voidaan päätellä että avointen joukkojen karakteristiset funktiot ovat sulkeumassa $\overline{\operatorname{span}}(\{\ h_n :\ n \in \mathbb{N}\ \})$; mittateorian nojalla sulkeumaan saadaan näin kaikki karakteristiset funktiot; sen jälkeen yksinkertaiset funktiot, ja lopulta koko $L^2\,[0,1] = \overline{\operatorname{span}}(\{\ h_n :\ n \in \mathbb{N}\ \})$.].

Haarin kannan Fourier-kertoimet funktiolle $f \in L^2\,[0,1]$ saadaan kaavoista

$$(\, f \mid h_0\,) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t, \quad (\, f \mid h_n\,) = 2^{\frac{k}{2}} \left[\int_{\Delta_n^+} f\,\mathrm{d}t\ -\ \int_{\Delta_n^-} f\,\mathrm{d}t \right]$$

kun $n = 2^k + j$ kuten edellä. Siis kaikilla $f \in L^2\,[0,1]$ on

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (\, f \mid h_n\,)\, h_n$$

ja sarja suppenee avaruudessa $L^2\,[0,1]$, so. L^2-normin mielessä.

(3) Haarin systeemillä on seuraava mainio skaalausominaisuus,

$$h_n(x) = 2^{k/2}\, h_1(2^k x - j)$$

kun $n = j + 2^k$ ja $x \in \Delta_n$ kuten edellä. Tällaiset skaalaus-ominaisuudet helpottavat merkittävästi numerisointia. Toisaalta Haarin systeemin pulmana on se että kantafunktiot h_n ovat epäjatkuvia. Etsittäessä kantafunktioita, jotka ovat jatkuvia tai sileitä, ja joilla on samat skaalausominaisuudet, on päädytty niin sanottuihin *wavelet*-kantoihin, joita on viime aikoina on tutkittu erityisen paljon. Näillä on myös käytännön mielenkiintoa monissa sovelluksissa, jotka liittyvät muun muassa signaalinkäsittelyyn, kuvankäsittelyyn jne. Pulmana on ettei kompaktikantajaisella waveletillä (= funktion h_1 vastineella) ole esitystä alkeisfunktioiden avulla, paitsi sarjakehitelmänä. Esitämme siksi tässä vain kuvan tyypillisestä wavelet-kannasta. Esimerkiksi, jos ψ on ao. kuvan funktio

tähän tulee kuva!!

niin funktiot $2^{j/2}\psi(2^jx-k)$, missä $x\in\mathbb{R}$ ja $j,k\in\mathbb{Z}$, muodostavat Hilbertin kannan L^2:ssa.

(4) Mainitaan lopuksi vielä pari esimerkkiä; *näitä ei kuitenkaan luennoilla käsitelty*. Soveltamalla Lauseen 4.40 kohdan (1) yhteydessä esiteltyä *Gramm–Schmidt* ortonormeeraus menetelmää polynomeihin saadaan Hilbertin kanto- ja moniin eri (painotettuihin) L^2-avaruuksiin. Esimerkiksi, olkoon

$$p_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\big((t^2-1)^n\big)$$

n:s *Legendren polynomi*. Differentiaali- ja integraalilaskennan peruskurssin avulla tiedämme, että

$$(\,p_n\,|\,p_k\,)=\int_{-1}^{1}p_n(t)p_k(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{2n+1}\delta_{nk},$$

missä δ_{nk} on *Kroneckerin δ-symboli* eli

$$\delta_{nk}=\begin{cases}1, & n=k\\ 0, & n\neq k.\end{cases}$$

Merkitään $e_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,p_n$. Voidaan todistaa, että saatu jono $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ on Hilbertin kanta avaruudessa $L^2([-1,1])$. Jono voidaan konstruoida myös suoraan käyttämällä Gramm–Schmidtin menetelmää polynomien jonoon $(1,t,t^2,t^3,\ldots)$. Olkoon

$$L^2(\Omega,\rho):=\{\,f:\ \int_\Omega |f(t)|^2\rho(t)\,\mathrm{d}\mu<\infty\,\},\quad \rho(t)=e^{-t^2}.$$

Hermiten polynomit

$$H_n(t)=n!\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^k(2t)^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!},\quad n=0,1,\ldots$$

muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R},e^{-t^2})$ ortonormaalin kannan. Myös tämä jono on saatu Gramm–Schmidtin menetelmällä jonosta $(1,t,t^2,t^3,\ldots)$.

(5) *Laguerren polynomit* määritellään kaavalla

$$L_n^{(\alpha)}(t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{t^k}{k!},\quad \alpha>-1,\ n=0,1,\ldots.$$

Systeemi $(L_n^{(\alpha)}(t))_{n=0}^{\infty}$ on ortonormaali kanta avaruudessa $L^2(\mathbb{R}_+,te^{-t})$.

Seuraavassa luvussa osoitetaan että jono $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ on ortonormaali kanta $\mathbb{C}$-kertoimisessa Hilbertin avaruudessa $L^2(0,2\pi)$.