3. Täydellisyys ja Banachin avaruus

Reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ (varustettuna normilla $|x-y|$) eroaa ratkaisevasti rationaalilukujen joukosta $\mathbb{Q}$ seuraavan ominaisuutensa perusteella: reaalilukujono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee $\mathbb{R}$:ssä joss (x_n) on Cauchyn jono. Tätä reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ ominaisuutta sanotaan täydellisyydeksi. Toisena esimerkkinä mainitaan avaruus

$$E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} |\ f \text{ on Riemann-integroituva}\}$$

varustettuna seminormilla

$$\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Avaruus $(E, \| \cdot \|_1)$ ei ole täydellinen (todistus sivuutetaan); tämä puute oli eräs keskeisistä syistä Lebesgue integraalin käyttöönottoon ja kehittämiseen.

Yleisemmällä tasolla, (esim. differentiaali)yhtälöitä ratkaistaan tyypillisesti hakemalla approksimatiivisia ratkaisuja, ja lähes säännöllisesti funktioavaruuksilta vaaditaan täydellisyyttä, jotta approksimatiivisille ratkaisuille löydetään jokin rajafunktio.

3.1. **Määritelmä.** Normiavaruuden $(E, \| \cdot \|)$ jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *Cauchyn jono*, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_k - x_j \| < \varepsilon$$

aina kun $k \geq m_\varepsilon$ ja $j \geq m_\varepsilon$.

Huomautus. Kun tarkastellaan jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ määräämiä loppuosan joukkoja $A_m = \{ x_n : \ n \geq m \}$, missä $m = 1, 2, \dots$ ja huomataan näiden halkaisijoitten avulla, että:

(x_n) on Cauchyn jono $\Leftrightarrow$ $\lim_{m\to\infty} \operatorname{diam}(A_m) = 0$.

Edellä joukon $A \subset E$ *halkaisja* on $\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \| x - y \|$.

Seuraavat kolme lausetta kertovat Cauchy jonojen perusominaisuudet.

3.2. **Lause.** *Normiavaruuden E suppeneva jono (x_n) on aina Cauchyn jono.*

Todistus. Olkoon $\lim_n x_n = y$ eli $\lim_n \| x_n - y \| = 0$. Jos $\varepsilon > 0$, on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_n - y \| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq m_\varepsilon.$$

Siis kun $j, k \geq m_\varepsilon$, niin $\| x_k - x_j \| \overset{\Delta-ey}{\leq} \| x_k - y \| + \| y - x_j \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\square$

Toisaalta,

3.3. **Lause.** *Normiavaruuden E Cauchy jono (x_n) on rajoitettu, eli on olemassa $M < \infty$ jolle $\|x_n\| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Olkoon $(x_n) \subset E$ Cauchy jono ja $A_m = \{\, x_n : \ n \geq m \,\}$. Koska (x_n) on Cauchy jono, niin on olemassa sellainen $m_0 \in \mathbb{N}$, että $\mathrm{diam}(A_{m_0}) < 1$. Jos $y \in A_{m_0}$, niin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\|\, y \,\| \overset{\Delta-ey}{\leq} \|\, y - x_{m_0} \,\| + \|\, x_{m_0} \,\| < 1 + \|\, x_{m_0} \,\|.$$

Siispä täyden jonon vektoreille saamme arvion

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\, x_n \,\| \leq \max\{\|\, x_1 \,\|, \|\, x_2 \,\|, \ldots, \|\, x_{m_0 - 1} \,\|, 1 + \|\, x_{m_0} \,\|\} < \infty.$$

□

Lopuksi hyödyllinen riittävä ehto Cauchyn jonon suppenemiselle.

3.4. **Lause.** *Jos normiavaruuden E Cauchyn jonolla (x_n) on osajono (x_{n_j}), joka suppenee kohti vektoria $y \in E$, niin myös koko jonolle pätee* $\lim_n x_n = y$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan Cauchyn ehdosta sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\|\, x_k - x_j \,\| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } k, j \geq m_\varepsilon.$$

Koska $\lim_{j \to \infty} x_{n_j} = y$, niin on olemassa sellainen indeksi $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ että kaikilla $j \geq j_\varepsilon$ pätee $n_j \geq m_\varepsilon$ ja $\|\, x_{n_j} - y \,\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tällöin

$$\|\, x_n - y \,\| \leq \|\, x_n - x_{n_j} \,\| + \|\, x_{n_j} - y \,\| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq m_\varepsilon$. Siis $\lim_n x_n = y$. □

Alamme sitten tarkastelemaan täydellisiä normiavaruuksia.

3.5. **Määritelmä.** Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on *täydellinen*, jos avaruuden E jokainen Cauchyn jono (x_n) suppenee avaruudessa E (siis on olemassa sellainen $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$).

Täydelliset normiavaruudet ovat funktionaalianalyysin keskeinen tutkimuskohde ja työkalu, joten näille on otettu käyttöön oma nimi (puolalaisen Stefan Banach'in (1892-1945) mukaan, joka merkittävällä tavalla kehitti alaa).

3.6. **Määritelmä.** Täydellistä normiavaruutta $(E, \|\cdot\|)$ sanotaan *Banachin avaruudeksi* (usein sanomme lyhyesti: E on Banachin avaruus).

Selvitetään seuraavaksi mitkä edellisessä luvussa löydetyistä avaruuksista ovat täydellisiä, ja erityisesti, kuinka käytännössä näytetään että annettu normiavaruus on täydellinen. Olkoon siis ensin $A \neq \emptyset$ joukko ja

$$B(A, \mathbb{K}) = B(A) := \{x : A \to \mathbb{K} |\ x \text{ rajoitettu kuvaus}\},$$

varustettuna normilla

$$\| x \|_\infty = \sup_{t \in A} |x(t)|, \quad \text{kun } x \in B(A, \mathbb{K}).$$

3.7. **Lause.** $(B(A, \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus. Todistus perustuu skalaarikunnan $\mathbb{K}$ täydellisyyteen. Nimittäin, olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$, $\varepsilon > 0$ ja $t \in A$ mielivaltainen. Koska

$$|x_k(t) - x_j(t)| \leq \| x_k - x_j \|_\infty < \varepsilon \tag{3.8}$$

kun indeksit $k, j \geq m_\varepsilon$ ovat riittävän suuria, on skalaarijono $(x_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchyn jono skalaarikunnassa $\mathbb{K}$. Tällöin on siis olemassa raja-arvo $\lim_n x_n(t) \in \mathbb{K}$, sillä metriset avaruudet $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ovat täydellisiä. Pitämällä $t \in A$ muuttujana saadaan raja-arvosta kuvaus $y : A \to \mathbb{K}$,

$$y(t) := \lim_{n \to \infty} x_n(t), \quad t \in A.$$

Lauseen väite seuraa osoittamalla seuraavat apuväitteet:

(i) kuvaus $y \in B(A, \mathbb{K})$ eli y on rajoitettu kuvaus $A \to \mathbb{K}$,

(ii) $\| x_n - y \|_\infty \to 0$, kun $n \to \infty$, eli $x_n \to y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$.

Tätä varten, olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, ja käytetään arviota (3.8), joka pätee *tasaisesti* jokaisella $t \in A$. Pidetään siinä $k \geq m_\varepsilon$ sekä $t \in A$ kiinteinä, ja annetaan $j \to \infty$. Silloin

$$\lim_{j \to \infty} |x_k(t) - x_j(t)| = |x_k(t) - y(t)|,$$

koska yo. tarkastelee vain skalaarilukuja $x_j(t)$. Epäyhtälön (3.8) säilyminen rajalla takaa, että

$$|x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \quad \text{kun } t \in A \tag{3.9}$$

ja $k \geq m_\varepsilon$. Tästä saadaan ensinnäkin että

$$|y(t)| \leq |y(t) - x_k(t)| + |x_k(t)| \leq \varepsilon + \| x_k \|_\infty \ \text{ kun } t \in A$$

eli että $y \in B(A, \mathbb{K})$. Toiseksi (3.9) pätee tasaisesti, so. samalla yläarviolla ε jokaisessa pisteessä $t \in A$. Saadaan siis

$$\| x_k - y \|_\infty = \sup_{t \in A} |x_k(t) - y(t)| \leq \varepsilon \text{ kaikilla } k \geq m_\varepsilon$$

Olemme näin näyttäneet, että $\lim_k x_k = y$ avaruudessa $B(A, \mathbb{K})$, eli suppeneminen tapahtuu ko. avaruuden *normin* suhteen.

Ylläolevat argumentit yhdistäen nähdään että $(B(A), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus. $\square$

Erikoistapauksina $A = \{1, \ldots, n\}$ ja $A = \mathbb{N}$ saadaan tästä

3.10. **Seuraus.**

a) vektoriavaruus $\mathbb{K}^n$ varustettuna metriikalla

$$\| x \|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n,$$

on Banachin avaruus.

b) $(\ell^\infty, \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.

Annetaan myös esimerkki *epätäydellisestä* normiavaruudesta.

3.11. **Esimerkki.** $(\ell^1, \| \cdot \|_\infty)$ ei ole täydellinen normiavaruus, kun

$$\| (x_k) \|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad (x_k) \in \ell^1.$$

Ratkaisu: Olkoon $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots)$, kun $n \in \mathbb{N}$. Selvästi $x^{(n)} \in \ell^1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta kaikilla $n, p \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned} \| x^{(n)} - x^{(n+p)} \|_\infty &= \| (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n \text{ kpl}}, \tfrac{1}{n+1}, \ldots, \tfrac{1}{n+p}, 0, 0, \ldots) \|_\infty \\ &= \sup_{n+1 \leq j \leq n+p} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$. Siispä $(x^{(n)})$ Cauchyn jono avaruudessa $(\ell^1, \| \cdot \|_\infty)$.

Väite epätäydellisyydestä seuraa, kun osoitetaan, että ei ole olemassa sellaista jonoa $y = (y_k) \in \ell^1$, että

$$\lim_{n \to \infty} \| x^{(n)} - y \|_\infty = 0.$$

Tehdään vastaoletus eli oletetaan, että löytyisi sellainen $y = (y_k) \in \ell^1$, että $x^{(n)} \to y$ sup-normissa. Jonon $(x^{(n)})$ alkioiden k :nnet koordinaatit $x_k^{(n)}$ ovat muotoa

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{k}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

ja kaikilla indekseillä $k \in \mathbb{N}$ pätee

$$|x_k^{(n)} - y_k| \leq \| x^{(n)} - y \|_\infty \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siksi

$$y_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k},$$

kun $k = 1, 2, \ldots$. Toisaalta

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty, \text{ eli } y = \left(\tfrac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \notin \ell^1,$$

mikä on ristiriidassa vastaoletuksen kanssa. Siis $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty)$ on epätäydellinen. $\square$

Huomautus. (1) Vastaavalla tavalla osoitetaan (Tee se !) että jos $1 \leq p < q < \infty$, niin $\ell^p \subset \ell^q$ mutta $(\ell^p, \|\cdot\|_q)$ ei ole täydellinen.
(2) Polynomien muodostama normiavaruus

$$\mathcal{P} = \{\ p\colon [0,1] \to \mathbb{R} :\ p \text{ polynomi } \}$$

varustettuna sup-normilla

$$\| p \|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$$

ei ole täydellinen. Samoin, jos $\mathcal{P}$ varustetaan luvun 2 Esimerkissä 2.13.(2) annetuilla normeilla $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$, osoittautuu että $\mathcal{P}$:stä ei tule täydellistä. (Epätäydellisyyden todistus on samantapainen kuin edellisessä Esimerkissä.)

Seuraavan tuloksen avulla saadaan lisää esimerkkejä Banachin avaruuksista.

3.12. **Lause.** *Olkoon E Banachin avaruus ja $M \subset E$* suljettu *aliavaruus. Tällöin M on täydellinen eli Banachin avaruus, avaruuden E indusoimassa normissa.*

Todistus. Jos $(x_n) \subset M$ on Cauchyn jono avaruudessa M, niin (x_n) on myös avaruuden E Cauchyn jono. Koska E täydellinen, niin on olemassa sellainen raja-alkio $y \in E$, että $\lim_n x_n = y$. Koska M on suljettu ja $x_n \in M$ kaikilla n, niin raja $y \in \overline{M} = M$, joten M on täydellinen. $\square$

Edellinen tulos pätee myös käänteiseen suuntaan:

3.13. **Lause.** *Normiavaruuden E täydellinen aliavaruus M on suljettu avaruudessa E.*

Todistus. Olkoon $z \in \overline{M}$ mielivaltainen. Koska $M \cap B(z, 1/n) \neq \emptyset$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin löytyy sellainen jono $(x_n) \subset M$, että $\lim_n x_n = z$. Tällöin $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchyn jono avaruudessa E Lauseen 3.2 nojalla ja siten myös avaruudessa M, joten avaruuden M täydellisyyden nojalla $\lim_n x_n = y \in M$ on olemassa. Raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla on oltava $z = y \in M$, joten siis $\overline{M} = M$ ja M on suljettu avaruudessa E. □

3.14. **Seuraus.** *Olkoon M Banachin avaruuden E vektorialiavaruus. Tällöin M on täydellinen (eli Banachin avaruus) $\Leftrightarrow$ M on suljettu.*

Todistus. Seuraa välittömästi Lauseista 3.12 ja 3.13. □

Käytämme seuraavaksi näitä tietoja tutkimaan jatkuvien kuvausten avaruuksia.

3.15. **Esimerkki.** Olkoon X *topologinen* avaruus, ja

$$C(X) = C(X, \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} |\ f \text{ jatkuva avaruudessa } X\}$$

Jos $f, g \in C(X)$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$, niin pisteittäinen summafunktio $f + g \in C(X)$ ja $\lambda f \in C(X)$ eli $C(X)$ on vektoriavaruus. Merkitään

$$BC(X) = BC(X, \mathbb{K}) := B(X, \mathbb{K}) \cap C(X),$$

eli jatkuvien ja rajoitettujen kuvausten $X \to \mathbb{K}$ avaruus. Siis $BC(X)$ on avaruuden $B(X)$ on vektorialiavaruus.

Kysymys. Onko $BC(X) \subset B(X)$ suljettu (normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen)?

Olkoon $t \in X$ kiinteä, ja

$$BC_t(X) = \{\ f \in B(X) :\ \ f \text{ on jatkuva pisteessä } t\ \}.$$

Huomautus. (Topo I) $f : X \to \mathbb{K}$ on jatkuva pisteessä $t \in X$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen avoin ympäristö V, $t \in V \subset X$, että

$$|f(u) - f(t)| < \varepsilon \text{ kaikilla } u \in V.$$

3.16. **Lemma.** *$BC_t(X)$ on avaruuden $B(X)$ suljettu vektorialiavaruus kaikilla $t \in X$.*

Todistus. Olkoon $g \in B(X)$ sellainen funktio $X \to \mathbb{K}$, että g sisältyy avaruuden $BC_t(X)$ sulkeumaan sup-normin $\| \cdot \|_\infty$ suhteen. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Tällöin on olemassa sellainen $f \in BC_t(X)$, että $\| g - f \|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$. Koska funktio f on jatkuva pisteessä t, niin löytyy sellainen avoin ympäristö $t \in V \subset X$, että

$$|f(t) - f(u)| < \tfrac{\varepsilon}{3} \text{ kaikilla } u \in V.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}|g(t)-g(u)| &\leq \underbrace{|g(t)-f(t)|}_{\leq \| g-f \|_\infty} + |f(t)-f(u)| + \underbrace{|f(u)-g(u)|}_{\leq \| g-f \|_\infty} \\ &\leq 2 \underbrace{\| g-f \|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon\end{aligned}$$

kaikilla $u \in V$. Siis g on jatkuva pisteessä t, joten $g \in BC_t(X)$ ja siis $BC_t(X)$ on suljettu. $\square$

3.17. **Lause.** *$(BC(X), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Koska f on jatkuva avaruudessa X joss f on jatkuva kaikissa pisteissä $t \in X$, niin

$$BC(X) = \bigcap_{t \in X} BC_t(X),$$

missä $BC_t(X)$ on suljettu kaikilla $t \in X$ Lemman 3.16 nojalla. Siis $BC(X)$ on suljettu aliavaruus avaruudessa $B(X)$. Nyt väite seuraa Lauseista 3.7 ja 3.12. $\square$

3.18. **Seuraus.** *Jos X on kompakti topologinen avaruus, niin $(C(X), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus. Erityisesti, $(C(0,1), \| \cdot \|_\infty)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Käytetään Topo I:n tulosta jonka mukaan kompaktissa avaruudessa X jokainen jatkuva kuvaus $f : X \to \mathbb{K}$ on rajoitettu, eli $C(X) = BC(X)$. $\square$

Huomautus. Edellä $C(0,1) \equiv C([0,1])$. Sen sijaan vektoriavaruudessa $C((0,1)) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} | \ f$ jatkuva välillä $(0,1)\}$ ei ole edes "järkevää" normia (vrt. Harjoitukset 2).

Esimerkin 2.10 kohdassa (2) esiteltiin avaruuden ℓ^∞ aliavaruudet c ja c_0.

$$c := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n \text{ on olemassa}\},$$
$$c_0 := x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n = 0\}.$$

3.19. **Lause.** *c ja c_0 ovat Banachin avaruuksia (sup-normin suhteen).*

Todistus.
(1) $c_0 \subset \ell^\infty$ on *suljettu* vektorialiavaruus (Harjoitukset 1)
(2) $c \subset \ell^\infty$ on suljettu:
Olkoon $x = (x_k) \in \ell^\infty$ sellainen jono, että $x \in \bar{c}$. Kun $\varepsilon > 0$, niin löytyy sellainen jono $y = (y_k) \in c$, että

$$\| x - y \|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Koska (y_k) on suppeneva jono, niin erityisesti (y_k) on skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siis on olemassa sellainen $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$|y_j - y_k| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Tällöin

$$\begin{aligned} |x_j - x_k| &\overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |x_j - y_j| + |y_j - y_k| + |y_k - x_k| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

kaikilla $j, k \geq m_\varepsilon$. Koska $\varepsilon > 0$ mielivaltainen, niin $x = (x_k)$ on myös skalaarikunnan $\mathbb{K}$ Cauchyn jono. Siispä (x_k) suppenee, joten $x \in c$. Siis $c = \overline{c}$ on suljettu, joten Lauseen 3.12 nojalla c on Banachin avaruus. $\square$

Huomautus. Olkoon $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ja varustetaan se topologialla τ, jonka kantana ovat joukot

$$U = \{n\} \quad \text{ja} \quad V = \{\infty\} \cup \{\, k \in \mathbb{N} : \ k \geq m \,\}, \quad \text{missä } n, m \in \mathbb{N}.$$

Saatu avaruus $(\overline{\mathbb{N}}, \tau)$ on $\mathbb{N}$:n yhden pisteen kompaktifiointi. Tällöin itse asiassa $c = C(\overline{\mathbb{N}})$. Siten Lause 3.19 seuraa myös Seurauksesta 3.18.

Vektoriarvoisista sarjoista

Olkoon E normiavaruus ja $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jono avaruudessa E. Mietimme seuraavaksi vastaavan vektorisarjan $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ summautumista. Toisin sanoen, pätevätkö tutut sarjateorian perusteet myös äärettömän dimension tapauksessa ?

Sarjaa merkitään tavallisesti symbolilla $\sum_k x_k$ tai $\sum x_k$. Osasummille käytetään myös tuttuja merkintöjä,

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{kun } n \in \mathbb{N}. \quad (s_n \in E \quad \forall n.)$$

Edelleen, alkio $x_k \in E$ on sarjan k:s *termi.*

3.20. **Määritelmä.** Olkoon $\sum x_k$ normiavaruuden E alkioiden muodostama sarja. Mikäli osasummien jono (s_n) suppenee kohti vektoria $s \in E$, eli

$$\lim_{n\to\infty} \| s_n - s \| = 0,$$

sanotaan että sarja $\sum_k x_k$ *suppenee* E:ssa ja sen *summa* on s; merkitään tällöin

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Sanotaan, että E:n sarja $\sum_k x_k$ on *absoluuttisesti* suppeneva (joskus myös: *normisuppeneva*), jos positiiviterminen sarja $\sum_k \| x_k \|$ suppenee.

3.21. **Esimerkki.** Olkoon $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \ldots) \in \ell^2$, kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ ℓ^2:ssä? Entä suppeneeko $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ absoluuttisesti ℓ^2:ssä?

Ratkaisu: Olkoon $x = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$. Nyt $x \in \ell^2$ koska

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tällöin sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n}$ suppenee ℓ^2:ssä ja sen summa $\sum \frac{e_n}{n} = x$. Nimittäin, sarjan m:s osasumma s_m on

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{e_n}{n} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, 0, 0, \ldots)$$

ja siis

$$\| x - s_m \|_2 = \| (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m\ kpl}, \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+2}, \ldots) \|_2 = \Big(\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \Big)^{1/2} \to 0,$$

kun $m \to \infty$; kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi. Kuitenkaan sarja $\sum \frac{e_n}{n}$ *ei ole* normisuppeneva avaruudessa ℓ^2, sillä

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \frac{e_n}{n} \Big\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \| e_n \|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \overset{DI}{=} \infty.$$

□

Täydellisyyden ja normisuppenevien sarjojen välillä on tärkeä yhteys:

3.22. **Lause.** *Normiavaruus E on Banachin avaruus jos ja vain jos jokainen avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja $\sum_k x_k$ suppenee avaruudessa E.*

Todistus.
”⇒” Olkoon E Banachin avaruus ja $\sum_k x_k$ avaruuden E absoluuttisesti suppeneva sarja. Jos $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, ja $s_m = \sum_{k=1}^{m} x_k$ on sarjan m:s osasumma, niin

$$\begin{aligned} \| s_{n+p} - s_n \| &= \| \sum_{j=1}^{n+p} x_j - \sum_{j=1}^{n} x_j \| = \| x_{n+1} + \cdots + x_{n+p} \| \\ &\overset{\triangle-\mathrm{ey}}{\leq} \sum_{j=n+1}^{n+p} \| x_j \| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \| x_j \| \to 0 \end{aligned}$$

kaikilla $p \in \mathbb{N}$, kun $n \to \infty$. Siis (s_n) on Cauchyn jono avaruudessa E, joten se suppenee.

"$\Leftarrow$" Oletetaan, että avaruuden E jokainen absoluuttisesti suppeneva sarja suppenee. Olkoon (x_n) Cauchyn jono avaruudessa E. Lauseen 3.4 nojalla riittää löytää suppeneva osajono (x_{n_j}). Konstruoidaan osajono (x_{n_j}) induktiolla seuraavasti:

Koska (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_0 \in \mathbb{N}$, että

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2}$$

kaikilla $p, q \geq n_0$. Oletetaan, että on jo valittu luvut $n_0 < n_1 < \ldots < n_j$ joille

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

kaikilla $p, q \geq n_k$ ja $k = 0, 1, \ldots, j$. Valitaan seuraavaksi n_{j+1}. Koska jono (x_n) on Cauchyn jono, niin löytyy sellainen $n_{j+1} \in \mathbb{N}$, että $n_{j+1} > n_j$ ja

$$\| x_p - x_q \| < \frac{1}{2^{j+2}}$$

kaikilla $p, q \geq n_{j+1}$.

Merkitään nyt $y_0 = x_{n_0}$, $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$ kun $j = 1, 2, \ldots$. Tällöin $\| y_j \| = \| x_{n_j} - x_{n_{j-1}} \| < \frac{1}{2^j}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots$, sillä $n_j > n_{j-1}$ ja arvio seuraa valitsemalla $p = n_j$ ja $q = n_{j-1}$.

Siispä sarja $\sum y_j$ on absoluuttisesti suppeneva, sillä

$$\sum_{j=0}^{\infty} \| y_j \| < \|y_0\| + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)} < \infty.$$

Oletuksen nojalla sarja $\sum y_j$ siis suppenee. Merkitään sarjan summaa

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j$$

ja tarkastellaan sarjan $\sum_{j=0}^{\infty} y_j$ osasummia. Havaitaan, että itse asiassa

$$\sum_{j=0}^{k} y_j = x_{n_0} + (x_{n_1} - x_{n_0}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) = x_{n_k} \quad \text{kaikilla } k.$$

Näin ollen jonon (x_n) osajono $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ suppenee kohti pistettä $y \in E$. Lauseen 3.4 nojalla siis myös jono (x_n) suppenee kohti pistettä y ja siis E on täydellinen. $\square$

Lauseen 3.22 nojalla voidaan usein osoittaa avaruuden täydellisyys: näin on esimerkiksi reaalilukujen joukon R tapauksessa. Olkoon $\sum a_k$ itseisesti suppeneva sarja R:ssä. Merkitään $b_k = |a_k| - a_k$, kun $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $0 \leq b_k \leq 2|a_k|$, joten sarja $\sum b_k$ suppenee vertailuperiaatteen nojalla. Koska $a_k = |a_k| - b_k$, suppenee sarja $\sum a_k$ myös. Siis Lause 3.22 sanoo, että $\mathbb{R}$ on täydellinen.

Absoluuttisesti suppenevien sarjojen kriteerin avulla myös avaruuksien ℓ^p täydellisyys saadaan verraten "kivuttomasti".

3.23. **Lause.** *Jonoavaruus* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ *on Banachin avaruus kaikilla* $1 \leq p < \infty$.

Todistus. Olkoon $\sum x^{(n)}$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa ℓ^p, siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p < \infty.$$

Jos merkitään vektoria eli jonoa $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, niin

$$|x_k^{(n)}| \leq \Big(\sum_i |x_i^{(n)}|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = \| x^{(n)} \|_p$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$, joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty, \qquad \text{kullakin } k \in \mathbb{N}.$$

Siten skalaarilukujen sarja $\sum_n x_k^{(n)}$ suppenee, sillä $\mathbb{K}$ on täydellinen. Merkitään

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} x_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Olemme näin löytäneet uuden lukujonon $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Väitämme, että

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$$

avaruudessa ℓ^p. Olkoon $\varepsilon > 0$. Absoluuttisen suppenevuuden perusteella löytyy sellainen $m \in \mathbb{N}$, että

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \| x^{(n)} \|_p \leq \varepsilon.$$

Olkoon $i, r, s \in \mathbb{N}$, $m \leq r < s$. Koska kyseessä äärellinen summa, niin saadaan

$$\sum_{k=1}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p = \lim_{s \to \infty} \sum_{k=1}^{i} \Big| \sum_{n=1}^{s} x_k^{(n)} - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \lim_{s \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p.$$

Toisaalta, avaruuden ℓ^p kolmioepäyhtälön perusteella

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big|^p = \Big\| \sum_{n=r+1}^{s} x_k^{(n)} \Big\|_p^p \leq \Big(\sum_{n=r+1}^{s} \| x_k^{(n)} \|_p \Big)^p$$
$$\leq \Big(\sum_{n=r+1}^{\infty} \| x_k^{(n)} \|_p \Big)^p \leq \varepsilon^p.$$

Kun $s \to \infty$, niin tästä seuraa, että

$$\sum_{k=1}^{i} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p$$

kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja $r \geq m$. Antamalla siis $i \to \infty$ nähdään, että

$$\| \, y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)} \, \|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \Big| y_k - \sum_{n=1}^{r} x_k^{(n)} \Big|^p \leq \varepsilon^p,$$

kun $r \geq m$. Siis jono $(y_k - \sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, joten Lauseen 2.23 sivulla 20 nojalla

$$y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} = \Big(y_k - \sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k \in \mathbb{N}} + \Big(\sum_{n=1}^{m} x_k^{(n)} \Big)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p,$$

ja edelleen

$$\Big\| \, y - \sum_{n=1}^{r} x^{(n)} \, \Big\|_p \leq \varepsilon,$$

kun $r \geq m$. Näin ollen sarja $\sum x^{(n)}$ suppenee ja Lauseen 3.22 sivulla 36 nojalla ℓ^p on Banachin avaruus. □

L^p-avaruudet

Haluamme seuraavaksi määritellä jonoavaruuden ℓ^p vastineet ”jatkuvassa” tapauksessa, eli avaruudet joiden normit kuvauksille $f : \Omega \to \mathbb{K}$ saadaan suureista

$$\| \, f \, \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{1/p}.$$

Päädymme näin L^p-avaruuksien käsitteeseen. Tämän tarkempi/syvällisempi teoria kuuluu kursseihin Mitta- ja integraali sekä Reaalianalyysi. L^p-avaruudet ovat kuitenkin keskeisiä esimerkkejä Funktionaalianalyysissä ja sen sovelluksissa; lisäksi Hilbert-avaruuksien (todellisesta) käytöstä ei saa kunnon kuvaa ilman L^2-avaruuksia. Käymme siksi alla L^p-avaruuksien perusideat lyhyesti läpi, niitä lukijoita silmällä pitäen, jotka eivät ole vielä suorittaneet yo. kursseja. Keskitymme nimenomaan ideoitten esittelyyn ja sivuutamme useiden väitteiden todistukset, jotka jäävät Mittateorian kursseilla käsiteltäviksi.

Tämän kurssin tarpeisiin riittää tarkastella (Lebesgue-)mitallisia osajoukkoja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ja n-ulotteista Lebesgue mittaa μ, mutta mitä alla kerrotaan pätee myös yleisissä mitta-avaruuksissa (Ω, Σ, μ) (missä Σ on jokin joukkoon Ω liittyvä σ-algebra ja μ on Σ:ssa määritelty positiivinen mitta). Muotoa

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}$$

olevia funktioita kutsutaan yksinkertaisiksi funktioiksi; tässä $a_k \in \mathbb{K}$, $E_k \subset \Omega$ on mitallinen joukko kun $k = 1, \ldots, n$, sekä karakteristinen funktio $\chi_E(x) =$

1 jos $x \in E$ ja $\chi_E(x) = 0$ kun $x \notin E$. Yksinkertaisen funktion integraali määritellään helposti kaavalla

$$\int_\Omega f\, d\mu = \int_\Omega f(x) d\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k).$$

[Muista myös: m.k. $\equiv$ melkein kaikkialla, so. nollamittaisen joukon ulkopuolella.]

Jos $0 \le f$ on mitallinen funktio, löytyy jono yksinkertaisia funktioita f_n niin että $0 \le f_n \le f_{n+1} \le \cdots \le f$ ja $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ melkein kaikkialla. (Itse asiassa funktio on mitallinen jos ja vain jos se on yksinkertaisten funktioiden pisteittäinen raja m.k. $x \in \Omega$.) Asetetaan

$$\int_\Omega f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu, \tag{3.24}$$

missä f_n:nien integraalit muodostavat kasvavan lukujonon, ja siten yo. raja-arvo on olemassa (voi olla ∞).

Mittateoriassa näytetään että (3.24):n raja-arvo on approksimoivan jonon $\{f_n\}$ valinnasta riippumaton. Mutta voi hyvin olla että (3.24):n raja-arvo ja siis f:n integraali on ∞! Tämän pulman välttämiseksi, yleiselle mitalliselle funktiolle f sanotaan että se on *integroituva*, mikäli $\int_\Omega |f|\, d\mu < \infty$.

Jos nyt $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on integroituva, funktion positiivinen osa $f_+ = \max\{f(x), 0\}$ ja negatiivinen osa $f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ ovat integroituvia, ja voimme asettaa

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f_+ d\mu - \int_\Omega f_- d\mu.$$

Kompleksiarvoiselle funktiolle $f = u + iv$ asetetaan $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega u d\mu + i \int_\Omega v d\mu$.

Mittateoriassa osoitetaan, että jos $\Delta \subset \mathbb{R}$ on suljettu ja rajoitettu väli, ja f on Riemann integroituva Δ:ssa (erityisesti, jos f on jatkuva !), silloin nyt määritelty integraali on täsmälleen sama kuin tuttu Riemann integraali !!

Olkoon sitten $1 \le p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $\mu(\Omega) > 0$, missä μ on Lebesguen mitta avaruudessa $\mathbb{R}^n$. Määrittelemme aluksi joukon $L^{(p)}(\Omega) = L^{(p)}$ niiden mitallisten funktioiden $f \colon \Omega \to \mathbb{K}$ joukkona, joille

$$\| f \|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{1/p} < \infty.$$

Jotta $L^{(p)}$ olisi vektoriavaruus, on näytettävä, että $\| \cdot \|_p$ on seminormi avaruudessa $L^{(p)}$. Tähän tarvitaan (kuten ℓ^p-avaruuksien tapauksessa) Hölderin epäyhtälöä.

3.25. **Lemma** (Hölderin epäyhtälö). *Jos* $f \in L^{(p)}$ *ja* $g \in L^{(q)}$, *kun* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, *niin tällöin (pisteittäinen) tulo* $fg \in L^{(1)}$ *ja* $\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q$ *eli*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{q}}$$

Todistus. Jos $\| f \|_p = 0$, niin $f(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$, jolloin myös tulo $f(x)g(x) = 0$ m.k. $x \in \Omega$ ja siis $\int |fg| \, \mathrm{d}\mu = 0$. Samoin pätee, jos $\| g \|_q = 0$. Näissä tapauksissa väite on ilmeinen.

Voidaan siis olettaa, että $\| f \|_p \| g \|_q > 0$. Sovelletaan Lemmaa 2.17 sivulla 16 valitsemalla (kun $x \in \Omega$)

$$a = \frac{|f(x)|}{\| f \|_p} \text{ ja } b = \frac{|g(x)|}{\| g \|_q},$$

mistä seuraa epäyhtälö

$$\frac{|(fg)(x)|}{\| f \|_p \| g \|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\| f \|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\| g \|_q^q}, \ x \in \Omega.$$

Integroimalla tämä puolittain muuttujan x suhteen saadaan

$$\begin{aligned} \| f \|_p^{-1} \| g \|_q^{-1} \int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu &\leq \frac{1}{p} \| f \|_p^{-p} \int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \| g \|_q^{-q} \int_\Omega |g(x)|^q \, \mathrm{d}\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

□

3.26. **Seuraus** (Minkowskin epäyhtälö). *Jos* $f, g \in L^{(p)}$ *ja* $p \geq 1$, *niin*

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p.$$

Todistus. HT. □

Koska selvästi $\| \lambda f \|_p = |\lambda| \| f \|_p$, niin $L^{(p)}$ on tämän ja Minkowskin epäyhtälön nojalla $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus. Mutta avaruudessa $L^{(p)}$ on se pulma, että $\| \cdot \|_p$ *ei ole* normi:

$$\| f \|_p = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega \, !$$

(Siis $f \mapsto \| f \|_p$ on vain *seminormi*). Pulmasta selvitäksemme, samaistamme kaikki ne funktiot, jotka ovat samoja m.k. x.

Seuraava esimerkki antaa mielikuvan mitä tämä samaistaminen käytännössä merkitsee. Integroidaan vaikkapa seuraava funktio välillä $[0, 1]$,

$$f(x) = x, \text{ kun } 0 \leq x < 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 \leq x \leq 1$$

Voisimme myös asettaa (Piirrä funktioiden kuvaajat !)

$$f(x) = 1, \text{ kun } 0 \leq x \leq 1/2 \text{ ja } f(x) = 3, \text{ kun } 1/2 < x \leq 1$$

koska ei ole mitään luonnollista tapaa valita f:n arvoa epäjatkuvuuspisteessä $x = 1/2$; selvästi molemmat valinnat ovat yhtä hyviä, ja integroinnin kannalta molemmat valinnat tuottavat saman tuloksen. Onkin siksi järkevää samaistaa nämä funktiot !

Yleisemmin, annetulla funktiolla voi olla paljon enemmän epäjatkuvuus- (tai "epämääräisyys")pisteitä, joten saman filosofian mukaan on järkevää samaistaa funktiot f ja g, jos $f(x) = g(x)$ nollamittaista x:ien joukkoa lukuunottamatta.

Täsmällistä määrittelyä varten sanotaan että funktiot f, $g \in L^{(p)}$ ovat ekvivalentit, merk. $f \sim g$, jos $f = g$ m.k. x eli $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Asetetaan

$$[f] = \{g \in L^{(p)} : g \sim f\},\ \ f \in L^{(p)}.$$

Huomataan, että jos $f_1 \sim g_1$ ja $f_2 \sim g_2$ niin $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$. Tämä seuraa siirtymällä komplementteihin inkluusiossa

$$\{x : f_1(x) = g_1(x)\} \cap \{x : f_2(x) = g_2(x)\} \subset \{x : f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)\}.$$

Samoin $af_1 \sim af_2$ jos $f_1 \sim f_2$ ja $a \in \mathbb{K}$. Näin ekvivalenssiluokat muodostavat vektoriavaruuden:

$$[af + bg] = a[f] + b[g] \quad \text{kun } f, g \in L^{(p)},\ \ a, b \in \mathbb{K}.$$

(Selvitä itsellesi tämän yksityiskohdat !). Määritellään nyt

$$L^p(\Omega) = \{[f]\ : f \in L^{(p)}(\Omega)\}. \tag{3.27}$$

Huomataan että $\| f \|_p = \| g \|_p$ aina kun $f \sim g$, joten

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p, \quad f \in L^{(p)},$$

on siten hyvin määritelty. Edelleen, $\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow [f] = [0]$, eli avaruudessa $L^p(\Omega)$ suure $\| \cdot \|_p$ *on normi.*

Käytännössä, pidämme (so. kohtelemme) $L^p(\Omega)$:n elementtejä funktioina. Myös, siisteissä tapauksissa, esimerkiksi jos luokassa $[f]$ on jatkuva funktio, valitsemme sen luokan edustajaksi, eikä tulkinta $f \in L^p(\Omega)$ tuota pulmia.

Kuitenkin, yleisessä tapauksessa L^p-funktion arvo ei ole pisteittäin hyvin määritelty. Jos tarvitsemme tiettyä arvoa $f(x)$, joudumme valitsemaan luokasta [f] yhden edustajan; jos haluamme näin saada tietoa koko luokasta $[f]$, meidän on tällöin huolehdittava siitä, että päättelyjen lopputulos (!) ei riipu edustajan f valinnasta.

Vaihtoehto. Määritellään $L^p(\Omega)$ tulkitsemalla yo. konstruktio enemmän lineaarialgebrallisin konstein, käyttäen vektoriavaruuden tekijäavaruuksia. Tarkemmin, olkoon X vektoriavaruus ja M sen aliavaruus. Koska X on yhteenlaskun suhteen Abelin ryhmä ja M sen aliryhmä, voimme muodostaa tekijäryhmän X/M, jonka alkioina ovat jäännösluokat modulo M,

$$x + M, \quad x \in X.$$

Tässä $x + M = \{x + m : m \in M\}$ on määritelty joukkona, kuten Luvussa 2. Asetetaan yhteenlasku ja skalaarilla kertominen luonnollisilla kaavoilla

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \tag{3.28}$$

$$\lambda(x + M) = \lambda x + M \tag{3.29}$$

ja näin saadaan tekijäryhmästä X/M vektorialiavaruus.[3]

Olkoon nyt $M = \{f \in L^{(p)} : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, joka on avaruuden $L^{(p)}$ vektorialiavaruus.

3.30. **Määritelmä.** Avaruus $L^p = L^p(\Omega)$ on tekijäavaruus $L^{(p)}/M$.

Huomataan, että edellä $f + M = g + M$ jos ja vain jos $f - g \in M$, eli siis $f \sim g$. Kuten edellä todettiin, $\| f \|_p$ on sama kaikille funktioille $f \in L^{(p)}$, jotka poikkeavat toisistaan enintään 0-mittaisessa joukossa, joten lauseke

$$\|f + M\|_p = \| f \|_p, \ f \in L^{(p)},$$

on hyvin määritelty tässäkin vaihtoehdossa. Näin tekijäavaruuskonstruktio tuottaa "saman" avaruuden L^p kuten edellä.

Jos $f \in L^{(p)}$ on yleensä tapana merkitä funktion f määräämää tekijäavaruuden L^p alkiota eli luokkaa $f+M$ myös symbolilla f! Tässä on siis taas pidettävä mielessä, että jos kaksi avaruuteen $L^{(p)}$ kuuluvaa funktiota poikkeaa toisistaa enintään 0-mittaisessa joukossa, ne ovat avaruuden L^p alkioina samoja.

Seuraava tulos on keskeinen Funktionaalianalyyttisiä sovelluksia silmälläpitäen.

3.31. **Lause.** *Olkoon $1 \le p < \infty$. Tällöin $(L^p, \| \cdot \|_p)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Ensimmäinen väite seuraa yo. keskustelusta (Huomaa, että Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt pätevät myös avaruudessa L^p; Miksi ?).

L^p-avaruuksien täydellisyys kuuluu oikeastaan Reaalianalyysin kurssin materiaaliin, sillä päättely tarvitsee muutaman perustuloksen Lebesgue-integroinnista. Siksi ne lukijat, jotka eivät ole vielä Reaalianalysiä seuranneet, voivat ottaa tuloksen annettuna; todistuksen argumentteja ei tarvita muualla tässä kurssissa.

[3]Tarkemmin tätä ideaa selvitetään kurssilla Lineaarialgebra II.

Luonnostelemme alla kuitenkin täydellisyystodistuksen pääpiirteet, jotta Mittateoriaan perehtymätönkin lukija saa mielikuvan miten mitallisten funktioiden kanssa operoidaan. Täydellisyysagumentti on itse asiassa analoginen ℓ^p avaruuksien tapauksen kanssa.

L^p-avaruuksien täydellisyyttä varten tarvitaan seuraava Mitta ja integraalin tulos:

3.32. **Lemma** (Fatoun Lemma)**.** *Jos* $f_n\colon \Omega \to [0,\infty]$ *on mitallinen kaikilla* $n \in \mathbb{N}$*, niin*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x) d\mu(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) d\mu(x).$$

Todistus. Olkoon $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Silloin g_k on mitallinen, $g_k \leq f_k$, $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$ sekä

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Koska $\{g_k\}$ on kasvava funktiojono, Monotonisen suppenemisen lauseen mukaan $\lim_{k\to\infty} \int_\Omega g_k d\mu = \int_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k d\mu$. Erityisesti,

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega g_j(x)\,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

$\square$

Lauseen 3.31 todistus jatkuu. Olkoon $\sum f_n$ absoluuttisesti suppeneva sarja avaruudessa L^p, eli $M = \sum \| f_n \|_p < \infty$. Lauseen 3.22 sivulla 36 nojalla riittää osoittaa, että $\sum f_n$ suppenee L^p:ssa. Voimme valita *edustajan* $f_n \in L^{(p)}$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja riittää siis löytää sellainen $f \in L^{(p)}$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} \Big\| \sum_{n=1}^k f_n - f \Big\|_p = 0.$$

Jos merkitään

$$g_k(x) = \sum_{n=1}^k |f_n(x)|, \quad x \in \Omega,$$

niin avaruuden $L^{(p)}$ kolmioepäyhtälön nojalla

$$\| g_k \|_p = \Big\| \sum_{n=1}^k |f_n| \Big\|_p \leq \sum_{n=1}^k \| f_n \|_p \leq M,\ k \in \mathbb{N}.$$

Monotonisen suppenemisen lauseen nojalla

$$\int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^\infty |f_n| \Big)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Big(\sum_{n=1}^k |f_n| \Big)^p \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \| g_k \|_p^p \leq M^p < \infty.$$

Siis funktio $g(x) := \sum^{\infty}|f_n(x)| \in L^{(p)}$ ja edelleen tästä seuraa, että $g(x) < \infty$ m.k. x ja *näillä* x

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

suppenee avaruudessa $\mathbb{K}$. Asetetaan $f(x) = 0$, jos $g(x) = \infty$, jolloin $|f(x)| \leq g(x)$ kaikilla $x \in \Omega$ ja $f \in L^{(p)}$. Lisäksi Fatoun lemman nojalla

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Big| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{\Omega} \lim_{j\to\infty} \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \liminf_{j\to\infty} \int_{\Omega} \Big| \sum_{n=1}^{j} f_n - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big|^p \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Otetaan nyt p:nnet juuret puolittain saadusta epäyhtälöstä, jolloin

$$\Big\| f - \sum_{n=1}^{k} f_n \Big\|_p \leq \liminf_{j\to\infty} \Big\| \sum_{n=k+1}^{j} f_n \Big\|_p \leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{n=k+1}^{j} \| f_n \|_p = \sum_{n=k+1}^{\infty} \| f_n \|_p \to 0,$$

kun $k \to \infty$. Siispä jokainen avaruuden L^p normisuppeneva sarja suppenee, joten L^p on täydellinen eli L^p on Banachin avaruus. $\square$

Yllä oletettiin, että $1 \leq p < \infty$. Tapaus $p = \infty$ on itse asiassa helpompi. Koska tapauksissa $1 \leq p < \infty$ samaistimme funktiot, jotka poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa, haetaan nyt tälle vastine kun $p = \infty$. Päädymme seuraavaan käsitteeseen:

3.33. **Määritelmä.** Mitallinen funktio $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ on *oleellisesti rajoitettu*, jos on olemassa $0 \leq M < \infty$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla x jonkin 0-mittaisen joukon ulkopuolella. *Oleellinen supremum* eli

$$\| f \|_{\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

on infimum kaikista edellä mainituista luvuista M, siis

$$\| f \|_{\infty} := \inf\{\, M : \text{ mitta } \mu(\{\, x \in \Omega : \ |f(x)| > M \,\}) = 0 \,\}.$$

Kuten tapauksessa $1 \leq p < \infty$ samaistamme taas $f \sim g$, jos $f(x)$ ja $g(x)$ poikkeavat enintään 0-mittaisessa joukossa. Merkitään

$$L^{\infty} = L^{\infty}(\Omega) = \{[f] : f \text{ oleellisesti rajoitettu } \Omega \to \mathbb{K}\},$$

missä siis $[f] = \{g : g \sim f, g \text{ on oleellisesti rajoitettu } \}$ on vastaava ekvivalenssiluokka.

Kuten edellä, tulemme säännöllisesti käyttämään merkintää $f \in L^{\infty}$, kun tarkkaan ottaen tarkoitetaan, että f:n määräämä luokka $[f] \in L^{\infty}$.

3.34. **Lause.** $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ *on Banachin avaruus.*

Todistus. Taas tarvitaan hieman Mittateorian tietoja, ja siksi ne lukijat jotka eivät ole Reaalianalyysia seuranneet, voivat ottaa tuloksen annettuna. Selvyyden vuoksi annamme kuitenkin tässä todistuksen yksityiskohdat.
1) jos $f \in L^\infty$ (on mitallinen edustaja $\Omega \to \mathbb{K}$), niin $|f(x)| \le \| f \|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, sillä subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty\}) &= \mu(\cup_{n=1}^\infty \{x : |f(x)| > \| f \|_\infty + 1/n\}) \\ &\le \sum_{n=1}^\infty \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > \| f \|_\infty + 1/n\}) = 0.\end{aligned}$$

2) L^∞ on vektoriavaruus ja $\|\cdot\|_\infty$ on normi: Koska $|f(x)| \le \| f \|_\infty$ ja $|g(x)| \le \| g \|_\infty$ m.k. $x \in \Omega$, saadaan

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)| \le& |f(x)| + |g(x)| \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty \text{ m.k. } x \in \Omega \\ &\Rightarrow \| f + g \|_\infty \le \| f \|_\infty + \| g \|_\infty\end{aligned}$$

(Selvitä itsellesi miksi $\| af \|_\infty = |a| \| f \|_\infty$ kaikilla $f \in L^\infty$!)

3) L^∞ on täydellinen:

Olkoon (f_n) Cauchyn jono avaruudessa L^∞. Lauseen 3.3 sivulla 29 nojalla jono on rajoitettu eli $\| f_n \|_\infty \le M < \infty$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Kiinnitetään mitalliset edustajat $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$. Olkoon A_k ja $B_{n,m}$ ne joukon Ω osajoukot, joissa $|f_k(x)| > \| f_k \|_\infty$ ja $|f_n(x) - f_m(x)| > \| f_n - f_m \|_\infty$. Kohdan (1) nojalla joukot A_k ja $B_{n,m}$ ovat 0-mittaisia. Asetetaan

$$E = \Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} B_{n,m}\Big)$$

Tällöin mitan subadditiivisuuden perusteella

$$\mu(E) \le \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono (f_n) on Cauchyn jono, löytyy sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että

$$\| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \ge n_\varepsilon$. Kun $x \in \Omega \setminus E$, niin

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \| f_n - f_m \|_\infty < \varepsilon$$

kunhan $n, m \ge n_\varepsilon$, joten $(f_n(x))$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{K}$. Siispä $\mathbb{K}$:n täydellisyyden nojalla on olemassa raja-arvo $f(x) := \lim f_n(x)$ jokaisella $x \in \Omega \setminus E$. Asetetaan $f(x) = 0$, kun $x \in E$. Tällöin f on maitallinen kuvaus, ja koska

$$|f_n(x)| \le \| f_n \|_\infty \le M$$

kaikilla $x \in \Omega \setminus E$, niin $f \in L^\infty$. Samoin on voimassa

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \limsup_{m\to\infty} \| f_m - f_n \|_\infty \leq \varepsilon,$$

kun $n \geq n_\varepsilon$ ja $x \in \Omega \setminus E$. Koska $\mu(E) = 0$, niin tästä seuraa, että

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

□

Huomautus. Yleisimmin määritellään (vastaavalla tavalla kuin L^∞-avaruus) Banachin avaruus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ kun (Ω, Σ, μ) on (täydellinen) mitta-avaruus ja $1 \leq p \leq \infty$ (vrt. Reaalianalyysi I, 1.4-1.6). Tässä Σ on σ-algebra joukossa Ω ja $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ on positiivinen mitta.

Ylimääräinen huomautus (ei luennoilla): Avaruuden L^∞ täydellisyys voidaan todistaa myös käyttäen edellä kuvattua tekijäavaruuden struktuuria. Nimittäin, jos M on avaruuden X vektorialiavaruus niin yhtälöiden (3.28) avulla määriteltiin uusi vektoriavaruus X/M. Jos nyt X on normiavaruus ja M sen *suljettu* vektorialiavaruus, saadaan X/M:stä normiavaruus asettamalla

$$\| x+M \|_{X/M} = \inf\{\| x+m \| : m \in M\} = \inf\{\| x-m \| : m \in M\} = dist(x, M)$$

Helposti nähdään että $\| x + M \|_{X/M}$ on normi: Jokaisella $m_1, m_2 \in M$

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + y + m_1 + m_2 \| \leq \| x + m_1 \| + \| y + m_2 \|$$

ja ottamalla inf yli vektoreiden m_1, m_2, saadaan

$$\| x + y + M \|_{X/M} \leq \| x + M \|_{X/M} + \| y + M \|_{X/M}$$

Samalla tavalla nähdään, että $\| ax + M \|_{X/M} = |a| \| x + M \|_{X/M}$. Lisäksi, ylläolevasta seuraa, että $\| x + M \|_{X/M} = 0 \Leftrightarrow dist(x, M) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{M} = M$, eli $x + M = 0 + M$, avaruuden X/M nolla-alkio.

Lisäksi, harjoituksissa näytetään, että jos X on Banach avaruus ja $M \subset X$ on suljettu v.a.a, niin silloin X/M on Banach avaruus.

Valitsemalla nyt $X = \{f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ rajoitettu ja mitallinen}\} \subset B(\Omega, \mathbb{K})$ havaitaan mittateorian avulla, että X on suljettu $B(\Omega, \mathbb{K})$:ssa, ja siis Banach avaruus. Jos $M = \{f \in X : f(x) = 0 \text{ m.k. } x \in \Omega\}$, niin silloin voidaan samaistaa

$$L^\infty = X/M.$$

(Väitteen yksityiskohdat jätetään ylimääräiseksi harjoitustehtäväksi. Huomaa, että samaistuksessa pitää valita alkiolle $f \in L^\infty$ *rajoitettu* edustaja $g : \Omega \to \mathbb{K}$, $g \sim f$, jolle esimerkiksi $|g(x)| \leq \|f\|_\infty$ kaikilla $x \in \Omega$.)
Harjoitus 4/Tehtävä 5 kertoo nyt että L^∞ on Banach avaruus.

Banachin kiintopistelause (epälineaarinen FA)

Seuraava täydellisyyden aspekti on osoittautunut hyödylliseksi ja monipuoliseksi työkaluksi monissa eri funktionaalianalyysin sovelluksissa.

3.35. **Määritelmä.** Olkoon E Banach-avaruus ja $D \subset E$ osajoukko ($D \neq \emptyset$). Kuvaus $T : D \to E$ on *kontraktio* D:ssä, jos

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \| x - y \| \quad \text{kaikilla}\, x, y \in D$$

Kuvaus $T : D \to E$ on *aito kontraktio* jos on olemassa sellainen vakio $0 \leq k < 1$, että

$$\| T(x) - T(y) \| \leq k\| x - y \| \quad \text{kaikilla}\, x, y \in D$$

Jokainen kontraktio $T : D \to E$ on tasaisesti jatkuva D:ssä. Piste $x \in D$ on kuvauksen $T : D \to E$ *kiintopiste*, jos $T(x) = x$. (Huomaa, että kontraktion ei tarvitse olla lineaarinen kuvaus.)

Huomautus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $D \subset X$ osajoukko. Vastaavalla tavalla määritellään (aito) kontraktio $T : D \to X$ ja sen kiintopiste.

3.36. **Lause** (Banachin kiintopistelause, 1922). *Olkoon E Banachin avaruus ja $D \subset E$ suljettu osajoukko ja $T : D \to D$ aito kontraktio. Tällöin kuvauksella T on yksikäsitteinen kiintopiste $x \in D$ (eli $T(x) = x$).*

Todistus. Jos $x_0 \in D$ on mielivaltainen, asetetaan rekursiivisesti

$$\begin{cases} x_1 = T(x_0), \\ x_{n+1} = T(x_n), \quad \text{kun } n = 1, 2... \end{cases}$$

Merkitään $\alpha_n = \| x_{n+1} - x_n \|$ $(n \in \mathbb{N})$. Tällöin

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \| x_{n+1} - x_n \| = \| T(x_n) - T(x_{n-1}) \| \leq k\| x_n - x_{n-1} \| \\ &= k\| T(x_{n-1}) - T(x_{n-2}) \| \leq k^2\| x_{n-1} - x_{n-2} \| \\ &\leq ... \leq k^n\| x_1 - x_0 \| = k^n \alpha_0, \end{aligned} \tag{3.37}$$

kun $n \in \mathbb{N}$. Kolmioepäyhtälöä, arviota (3.37) ja geometrisen sarjan summakaavaa käyttämällä saadaan kaikilla $p = 1, 2, \ldots$ ja $n \in \mathbb{N}$ arvio

$$\begin{aligned} \| x_{n+p} - x_n \| &\leq \sum_{j=n}^{n+p-1} \| x_{j+1} - x_j \| = \sum_{j=n}^{n+p-1} \alpha_j \leq \sum_{j=n}^{n+p-1} k^j \alpha_0 \\ &= \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j \leq \alpha_0 k^n \sum_{j=0}^{\infty} k^j = \frac{\alpha_0 k^n}{1-k} \to 0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

kun $n \to \infty$. Siis $(x_n) \subset E$ on Cauchyn jono. Koska E Banachin avaruus, niin on olemassa $\lim_n x_n = x \in E$. Koska $x_n = T(x_{n-1}) \in D$ kaikilla $n = 1, 2, \ldots$, niin

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \in \overline{D} = D,$$

koska D on suljettu. Koska edelleen oletettiin, että T jatkuva, niin

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

eli x on kiintopiste. Osoitetaan vielä, että x on yksikäsitteinen. Olkoon $y \in D$ toinen kiintopiste kuvaukselle T eli $T(y) = y$. Tällöin

$$\| x - y \| = \| T(x) - T(y) \| \leq k \| x - y \|$$

jollakin $0 \leq k < 1$, sillä T on aito kontraktio. Siispä ainoa mahdollisuus on, että $\| x - y \| = 0$ eli $x = y$. $\square$

Huomautus. Yllä olevassa todistuksessa kiintopiste x löytyi iteroimalla:

$$x = \lim_{n\to\infty} T(x_n), \text{ missä } x_n = T(x_{n-1}) = \ldots = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n\,\mathrm{kpl}}(x_0),$$

missä $x_0 \in D$ oli jopa mielivaltainen. Lisäksi epäyhtälöstä (3.38) saadaan virhearvio (antamalla $p \to \infty$):

$$\| x - T^n(x_0) \| \leq \frac{k^n}{1-k} \| T(x_0) - x_0 \| \tag{3.39}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Seuraavaksi tarkastellaan parilla esimerkillä kuinka Banachin kiintopistelausetta voidaan soveltaa. Sovelluskohteita on itse asiassa lukematon määrä, aina yhden muuttujan numeriikasta esim. fraktaaligeometriaan asti. Sovelluksissa on tietysti löydettävä kuhunkin ongelmaan sopiva Banachin avaruus ja vastaava kontraktiokuvaus.

3.40. **Esimerkki.** Johdantoluvussa [vrt. (0.2)] lupasimme ratkaista integraaliyhtälön

$$f(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) f(s) ds = g(x), \quad x \in [0, 1], \tag{3.41}$$

ainakin kun parametri λ on pieni. Nyt meillä on koossa tässä tapauksessa tarvittavat ratkaisun elementit:

Annetuista funktioista $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ja $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ oletettiin että ne ovat jatkuvia. Siksi on luontevaa valita alla olevaksi Banach avaruudeksi

$C(0,1)$ sup-normilla varustettuna. Sopiva kontraktiokuvaus voidaan muodostaa monellakin tavalla; niistä helpoin ja luonnollisin ehkä

$$T : C(0,1) \to C(0,1), \quad (Tf)(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s)f(s)ds \tag{3.42}$$

sillä heti nähdään, että f on T:n kiintopiste, $T(f) = f$, jos ja vain jos f ratkaisee yhtälön (3.41).

Esimerkin 2.31 tuloksista seuraa, että $T : C(0,1) \to C(0,1)$ on jatkuva kuvaus. Saman Esimerkin menetelmillä voimme myös tarkemmin selvittää milloin T on aito kontraktio. Nimittäin

$$\begin{aligned} \| Tf - Th \|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 \lambda\, K(x,s)\, (f(s) - h(s))\, ds \right| \\ &\le |\lambda|\, \| K \|_\infty \, \| f - h \|_\infty \end{aligned}$$

missä $\| K \|_\infty = \sup\{ \ |K(x,s)| : x, s \in [0,1] \ \}$. Havaitaan siis että T on aito kontraktio jos λ on niin pieni, että $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$.

Banachin kiintopistelauseesta seuraa nyt että mikäli $|\lambda| < 1/\| K \|_\infty$, on kuvauksella T kiintopiste ja siten yhtälöllä (3.41) ratkaisu $f \in C(0,1)$; lisäksi f on yksikäsitteinen. (Tässä sovelluksessa $D = C(0,1)$.)

Banachin kiintopistelause on varsin vahva, sillä se antaa myös nopean algoritmin integraaliyhtälön ratkaisun f konstruoimiseksi (esim. numeerisesti): Lauseen jälkeisen huomautuksen mukaan $f = \lim_{n\to\infty} g_n$ missä

$$g_0(x) = g(x), \quad g_1(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds,$$

$$g_2(x) = g(x) \ + \ \lambda \int_0^1 K(x,s)g(s)ds \ + \ \lambda^2 \int_0^1 K(x,t) \Big(\int_0^1 K(t,s)g(s)ds \Big) dt,$$

ja niin edelleen. Lisäksi, arvion (3.39) mukaan jonon (g_n) suppeneminen on eksponentiaalista.

Ainoa pulma Banachin kiintopistelauseessa on että se toimii vain (aidoille) kontraktioille. Erityisesti, herää kysymys: miten yhtälöt (3.41) käyttäytyvät yleisillä parametreilla λ ? !

Seuraava esimerkki näyttää, että yllä λ:n pienuus oli olennaista; yleisten parametrien tapaus on siis paljon monimutkaisempi.

3.43. **Esimerkki.** Valitaan integraaliyhtälön (3.41) ytimeksi $K(x,s) = xs$, $0 \le x, s \le 1$, sekä olkoon annettu funktio $g(x) \equiv 1$. Silloin yhtälö (3.41) saa muodon

$$f(x) - \lambda\, x \int_0^1 sf(s)ds = 1, \quad x \in [0,1] \tag{3.44}$$

Koska $\| K \|_\infty = \sup_{x,s\in[0,1]} |K(x,s)| = 1$, yhtälöllä on kiintopistelauseen nojalla ratkaisu ainakin kun $|\lambda| \ < 1$. Lisäksi kuten yllä, ratkaisun voi löytää iteroimalla operaattoria $Th = 1 + \lambda \int_0^1 xsh(s)ds$; iteroinnissa huomataan että ratkaisun voi kehittää potenssisarjana λ:n suhteen. Valitussa erikoistapauksessamme potenssisarjan voi jopa esittää suljetussa muodossa (Ylimääräinen HT: Määrää ko. sarja ja sen summa).

Toisaalta, tapauksessa $K(x,s) = x\,s$ yhtälön voi myös ratkaista suoraan: Havaitaan nimittäin, että jokainen (3.44):n ratkaisu on muotoa $f(x) = 1 + Cx$ jollakin vakiolla C (Miksi?). Sijoittamalla nähdään että (3.44):n kanssa on yhtäpitävää

$$1 + Cx - \lambda\, x \int_0^1 s(1+Cs)ds = 1, \quad x \in [0,1]. \tag{3.45}$$

Integroinnin jälkeen (Tee se !) tämä identiteetti saa muodon $C - \lambda(1/2 + C/3) = 0$. Siten

$$C = \frac{3}{2}\frac{\lambda}{3-\lambda} \quad \text{ja} \quad f(x) = 1 + \frac{3\lambda\, x}{6 - 2\lambda}$$

Integraaliyhtälö siis ratkeaa aina kun $\lambda \neq 3$. Kun $\lambda = 3$ ratkaisua ei olemassa, millään vakiolla C.

Ylläolevassa löysimme tasan yhden poikkeusarvon λ. Esimerkkiä muokkaamalla voit helposti löytää ytimiä, joilla on 2, 3 tai useampia poikkeusarvoja.

Kun seuraavassa luvussa olemme rakentaneet Hilbertavaruuksien perusteorian, tulemme osoittamaan vielä enemmän:

3.46. **Esimerkki.** (ei luennoilla) Olkoon

$$K(x,s) = \frac{1}{3 - e^{2\pi i(x-s)}}, \quad x,s \in [0,1] \tag{3.47}$$

[Huom: Eulerin identiteettiä $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ käyttäen yo. ytimen voi kirjoittaa myös trigonometristen funktioiden avulla.]
Tällöin: Jos $\lambda \neq 3^n$, $n = 1, 2, \ldots$, yhtälö (3.41) ratkeaa kaikilla $g \in C(0,1)$. Toisaalta, jos $\lambda = 3^n$ jollakin n, ei ratkaisua kaikilla funktioilla g löydy !
Väitteen todistus seuraa nopeasti Fourier-sarjojen ominaisuuksista, ja jätämme sen siksi lukuun 4.

Huomaa, että tässäkin esimerkissä poikkeusarvojen joukko jää diskreetiksi.

Katsotaan lopuksi vielä yksi (hyvin!) erilainen esimerkki Banachin kiintopistelauseen soveltamisesta; tämä esimerkin luonne on yleissivistävä, eikä kuulu varsinaiseen kurssisisältöön; sivuutamme siksi osan todistuksista.

Muistetaan että Banachin kiintopistelause on yleispätevä periaate, jota voidaan käyttää myös täydellisissä metrisissä avaruuksissa (oleellisesti samalla todistuksella). Konstruoidaan nyt sen avulla Kochin lumihiutalekäyrä !

3.48. **Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{X} = \{\ A \subset \mathbb{R}^2 :\ A$ *kompakti*[4] osajoukko, $A \neq \emptyset\ \}$. Jos $A, B \in \mathcal{X}$, asetamme

$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{x\in A} \operatorname{dist}(x,B), \sup_{y\in B} \operatorname{dist}(y,A)\},$$

missä etäisyys $\operatorname{dist}(x,B)$ pisteestä x joukkoon A määritellään

$$\operatorname{dist}(x,B) = \inf\{\ \|\, x-b\,\| :\ b \in B\ \}$$

kun normina $\|\cdot\|$ on euklidinen normi tasossa $\mathbb{R}^2$. Tällöin d_H on *metriikka* joukkoperheessä $\mathcal{X}$ ja tätä metriikkaa sanotaan *Hausdorffin metriikaksi.*

Lisäksi $(\mathcal{X}, d_H)$ on *täydellinen* (perustuu kompaktisuuteen, sivuutetaan yksityiskohdat; HT). Olkoot $f_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $1 \le j \le n$, aitoja kontraktioita ja $k_j < 1$ vastaavat kontraktiovakiot. Tällöin

$$(*) \qquad k = \max_{j=1,\dots,n} k_j < 1,$$

jolloin siis $\|\, f_j(x) - f_j(y)\,\| \le k\|\, x-y\,\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$ ja $j = 1, 2, \dots, n$. Asetetaan

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

kun $A \in \mathcal{X}$ eli kun $A \subset \mathbb{R}^2$ on kompakti osajoukko. Koska kompaktien joukkojen äärellinen yhdiste on kompakti (Topologia I) on

$$\Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A)$$

kompakti kaikilla $A \in \mathcal{X}$. Siis $\Phi(A)$ on kuvaus $\mathcal{X} \to \mathcal{X}$.

Väite. Φ *on aito kontraktio* $(\mathcal{X}, d_H) \to (\mathcal{X}, d_H)$

Todistus. Olkoot $A, B \subset \mathbb{R}^2$ kompakteja. Jos

$$z \in \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A),$$

[4] Heine-Borel: $A \subset \mathbb{R}^2$ kompakti $\Leftrightarrow$ A suljettu ja rajoitettu

niin $z = f_l(x)$ joillakin $x \in A$ ja $l \in \{1, \ldots, n\}$. Olkoon $y \in B$ m.v. Tällöin $f_l(y) \in f_l(B) \subset \Phi(B)$, joten

$$\operatorname{dist}(z, \Phi(B)) \leq \| f_l(x) - f_l(y) \| \leq k \| x - y \|$$

missä $k < 1$ ehdon $(*)$ nojalla. Siis ottamalla infimum muuttujan $y \in B$ suhteen saadaan, että

$$\operatorname{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \operatorname{dist}(x, B).$$

Koska $z \in \Phi(A)$ mielivaltainen, on

$$\sup_{z \in \Phi(A)} \operatorname{dist}(z, \Phi(B)) \leq k \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B)$$

Symmetrian perusteella pätee:

$$\sup_{z \in \Phi(B)} \operatorname{dist}(z, \Phi(A)) \leq k \sup_{y \in B} \operatorname{dist}(y, A)$$

Siispä

$$d_H(\Phi(A), \Phi(B)) \leq k d_H(A, B)$$

kun $A, B \in \mathcal{X}$, joten Φ on aito kontraktio. $\square$

Nyt Banachin kiintopistelauseen metrisen version nojalla kuvauksella Φ on yksikäsitteinen kiintopiste $A \in \mathcal{X}$ eli on olemassa kompakti osajoukko $A \subset \mathbb{R}^2$, jolle

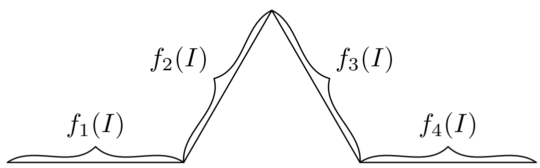
$$A = \Phi(A) = \bigcup_{j=1}^{n} f_j(A).$$

Lisäksi $A = \lim_n \Phi^n(B)$, missä suppeneminen tapahtuu metriikan d_H suhteen, lähtien mistä tahansa joukosta $B \in \mathcal{X}$.

Valitaan esimerkiksi kontraktiot f_j *similariteeteiksi* eli

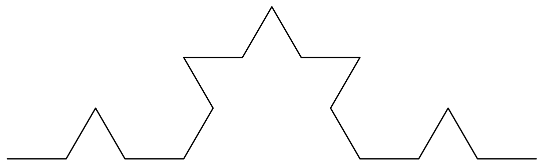
$$f_j(x) = r_j O_j(x) + b_j, \quad j = 1, ..., n$$

missä $0 < r_j < 1, b_j \in \mathbb{R}^2$ ja $O_j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jokin tason kierto origon ympäri. Tällöin saadaan kauniita esimerkkejä "fraktaaleista" joukoista. Valitaan vaikkapa similaariteetit $f_1, \ldots, f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ siten, että ne kuvaavat yksikköjanan $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ kuten seuraavassa kuvassa.



Nämä similariteetit määräävät kuvauksen Φ kuten yllä. Mikä on tällöin vastaava (yksikäsitteinen) invariantti joukko A, jolle $\Phi(A) = A$?!

Banachin kiintopistelauseen todistuksesta tiedämme, että kiintopiste A saadaan iteroimalla kuvausta Φ (esim. lähtien joukosta $I \in \mathcal{X}$). Nyt $\Phi^2(I) = \Phi(\Phi(I))$ näyttää tältä:



Rajalla $A = \lim_{n\to\infty} \Phi^n(I)$ saa seuraavan muodon (Kochin lumihiutalekäyrä):

tähän tulee kuva!!

Edellä oleva Banachin kiintopistelauseen sovellus on peräisin J. E. Hutchinsonilta vuodelta 1981.