

2. NORMI JA NORMIAVARUUS

Olkoon E vektoriavaruus (eli lineaariavaruus) skalaarikuntana $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Kurssilla Lineaarialgebra I määriteltiin vain \mathbb{R} -kertoimiset vektoriavaruudet, mutta kompleksikertoimiset avaruudet määritellään täysin analogisesti: Avaruudessa E on yhteenlaskun $x + y$ lisäksi annettu skalaarilla kertominen $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, kuvaus $\mathbb{C} \times E \rightarrow E$, joka toteuttaa ehdot

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad \text{ja} \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

kaikilla vektoreilla $x, y \in E$ ja skalaareilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Useimmiten kurssin tulokset ja käsitteet toimivat täysin samoin molemmille skalaarikunnan valinnalle, \mathbb{R} tai \mathbb{C} , ja käytämme silloin skalaarikunnalle merkintää \mathbb{K} . Jos skalaarikunta pitää spesifioida, siitä huomautetaan erikseen.

2.1. Esimerkkejä. $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{C}\}$ on \mathbb{C} -kertoiminen vektoriavaruus. Sellainen on myös kompleksisten polynomien avaruus

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dimensio: Kerrataan ensin lineaarialgebran käsitteitä. Jos $A \subset E$, sen virittämä E :n vektorialiavaruus on

$$(2.2) \quad \text{span}(A) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{K}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Lineaarialgebrasta muistetaan myös että vektori-jono $x_1, \dots, x_n \in E$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, jos

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \bar{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Honkasalon monisteen Lineaarialgebra I sivulla 50 on todistettu seuraava tulos, jonka oletamme tunnetuksi:

Vektoriavaruus E on äärellisulotteinen (so. äärellisen vektori-joukon virittämä) jos ja vain jos E :n vapaiden jonojen *pituuudet* ovat ylhäältä rajoitetut, so. on luku $M < \infty$ niin että jokaisessa E :n vapaassa joukossa on korkeintaan M vektoria.

Muistetaan vielä, että äärellisulotteisen avaruuden E dimensio $\dim(E)$ on E :n kannan (so. vapaan virittäjä-joukon) lukumäärä; tämä lukumäärä on kannasta riippumaton luku.

Tämä kaikki toimii myös kun kerroinkuntana on \mathbb{C} . Esimerkiksi yllä \mathbb{C}^n on äärellisulotteinen (tarkemmin, n -ulotteinen), kun taas \mathcal{P} on ääretönulotteinen: Polynomit $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, muodostavat vapaan joukon (miksi?), ja koska tuo joukko on ääretön, yo. tuloksen nojalla $\dim(\mathcal{P}) = \infty$.

Keskeinen idea Funktionaalianalyysissä on tuoda hyödyllisiä struktuureja funktioiden muodostamiin vektoriavaruuksiin erilaisten normien avulla.

2.3. Määritelmä. Kuvaus $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *normi* E :ssä, jos

- (N1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ kaikilla $x, y \in E$ ("kolmioepäyhtälö")
- (N2) $p(ax) = |a|p(x)$ kaikilla $x \in E, a \in \mathbb{K}$ ("homogeenisuus")
- (N3) $p(x) = 0 \iff x = \bar{0}$ (nolla-alkio E :ssä)

Tavallisesti merkitään $p(x) = \|x\|$. Paria $(E, \|\cdot\|)$ eli vektoriavaruuksia E varustettuna normilla $\|\cdot\|$ sanotaan *normiavaruudeksi*.

Huomautus.

- (1) normi $\|\cdot\|$ edellyttää, että määrittelyjoukko E on lineaariavaruus:

$$x + y \in E \text{ kun } x, y \in E \text{ ja } ax \in E \text{ kun } x \in E, a \in \mathbb{K}.$$

- (2) Kuvaus $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ on *seminormi* E :ssä, jos p toteuttaa ehdot (N1) ja (N2).¹ Tällöin

$$p(\bar{0}) = p(0 \cdot \bar{0}) = |0|p(\bar{0}) = 0,$$

ja $\{x \in E : p(x) = 0\}$ on avaruuden E vektorialiavaruus ehtojen (N1) ja (N2) nojalla.

2.4. Esimerkkejä.

$$(1) \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

on avaruuden \mathbb{R}^n *euklidinen* normi, kun $n = 1, 2, \dots$. Ehdot (N1)-(N3) toteutuvat; katso Topo I. Hieman myöhemmin tämä todistetaan myös erikoistapauksena yleisemmän avaruuden ℓ^p yhteydessä.

- (2) Kun A on mielivaltainen joukko, asetetaan

$$B(A, \mathbb{K}) := \{f : A \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_\infty := \sup_{t \in A} |f(t)| < \infty\}.$$

¹tämä yleisempi käsite on joskus tarpeen; tällä kurssilla suhteellisen harvoin

Tämä on rajoitettujen kuvausten $A \rightarrow \mathbb{K}$ avaruus. Tässä $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ ja $(af)(t) = af(t)$ kun $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $a \in \mathbb{K}$. Helposti nähdään, että $\|f\|_\infty$ on normi:

Perustelu. Olkoon $f, g \in B(A, \mathbb{K})$ ja $t \in A$. Tällöin

$$\begin{aligned} |(f + g)(t)| &= |f(t) + g(t)| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |f(t)| + |g(t)| \stackrel{\text{määr.}}{\leq} \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \\ \sup_{t \in A} |f + g| &= \sup_{t \in A} |(f + g)(t)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \end{aligned}$$

eli ehto (N1) on voimassa. Olkoon $a \in \mathbb{K}$ skalaari. Tällöin

$$|(af)(t)| = |af(t)| = |a||f(t)| \stackrel{\text{sup.yli}}{\leq} \|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty$$

eli myös ehto (N2) on voimassa. Koska

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in A} |f(t)| = 0 \iff f(t) = 0 \quad \forall t \in A$$

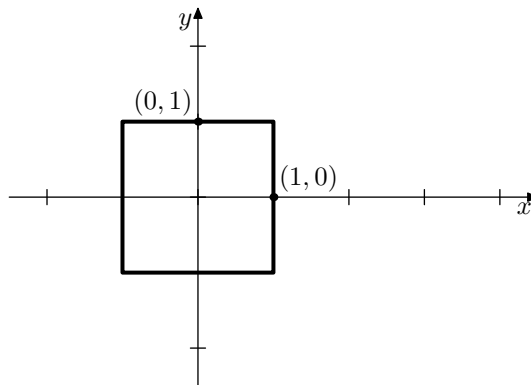
$$\iff f \text{ on } \bar{0}\text{-funktio}$$

niin myös (N3) toteutuu. \square

- (3) Myös \mathbb{R}^n :ssä tai \mathbb{C}^n :ssä voidaan määritellä normi edellisen kohdan erikoistapauksena: tällöin $A = \{1, \dots, n\}$, jolloin saadaan normi

$$\|x\|_\infty := \sup(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

missä $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Vaikka tämä normi antaa entisen topologian, sup-normin "geometria" on hieman erilainen. Esimerkiksi dimensiossa $n = 2$ avaruuden $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vastaava yksikköpallo $B_E = \{x : \|x\|_\infty \leq 1\}$ näyttää seuraavalta:



KUVA 3. Pallo B_E avaruudessa $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

- (4) Toinen erikoistapaus (2)-kohdasta saadaan, kun $A = \mathbb{N}$. Tällöin merkitään

$$\ell^\infty := B(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}^\infty : x_n \in \mathbb{K}, \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Tässä avaruudessa siis $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $a(x_n) = (ax_n)$ kun $(x_n), (y_n) \in \ell^\infty$ ja $a \in \mathbb{K}$. Koska vektorit $e_n = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n:s}, 0, \dots) \in \ell^\infty$ ovat lineaarisesti riippumattomia kun $n \in \mathbb{N}$ (Miksi?), on $\dim(\ell^\infty) = \infty$.

Seuraavaksi osoitetaan pari normin perusominaisuutta, joista seuraavan lauseen (2)-kohta liittyy normiavaruudet metrisiin.

2.5. Lause. *Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus. Tällöin*

(1) *kaikilla $x, y \in E$ on voimassa*

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$$

eli ns. Δ - eys "alaspäin". Erityisesti, kuvauksena normi $x \mapsto \|x\|$ on tasaisesti jatkuva E :ssa.

(2) *kuvaus $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $d(x, y) := \|x - y\|$ on metriikka avaruudessa E . Erityisesti $\|x\| = d(x, \bar{0})$, $x \in E$.*

Todistus.

(1) (vrt. Topo I, D II) Olkoon $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x - y + y\| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} \|x - y\| + \|y\| \\ &\implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \\ &\stackrel{\text{symm}}{\implies} \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \stackrel{(N2)}{=} \|x - y\| \\ &\implies \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \end{aligned}$$

(2) (vrt. Topo I) kaikilla $x, y, z \in E$ on voimassa

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \stackrel{(N1)}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| \\ &= d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

joten (M1) toteutuu. Ehto (M2) seuraa välittömästi ehdosta (N2). Edelleen

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \stackrel{(N2)}{\iff} x - y = \bar{0} \iff x = y,$$

joten myös (M3) on voimassa.

□

Normiavaruudessa voidaan siis puhua normin indusoimasta metrisen topologian käsitteistä, kuten avoimista palloista ja joukoista, jonojen suppenemisesta, jatkuvista funktioista jne. Metrisinä avaruuksina funktioavaruudet voivat

olla melko ”suuria”, esimerkkinä olkoon vaikkapa ℓ^∞ , joka ei ole edes separoituva (vrt. Harjoitukset). Useille käytännössä eteen tuleville funktioavaruuksille separoituvuus toisaalta pätee; myöhemmin osoitamme tämän esimerkiksi $C(0, 1)$:lle.

2.6. Esimerkki. Olkoon $f^{(n)} = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^\infty$ (n kpl ykkösiä) kun $n \in \mathbb{N}$. Suppeneeko jono $(f^{(n)})_{n=1}^\infty$ avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$?

Ratkaisu. Merkitään $f^{(n)} = (f_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$, jolloin siis määritelmän mukaan $f_k^{(n)} = 1$ kun $1 \leq k \leq n$ ja $f_k^{(n)} = 0$ kun $k > n$. Olkoon $f = (f_k)_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$ sellainen jono että

$$\|f^{(n)} - f\|_\infty = \sup_k |f_k - f_k^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Erityisesti, kiinteällä $k \in \mathbb{N}$ pätee $|f_k - f_k^{(n)}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Tästä seuraa, että $f_k = \lim_n f_k^{(n)} = 1$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$, eli raja-arvojonon on oltava $f = (1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty$. Toisaalta, $f^{(n)} - (1, 1, 1, \dots) = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$ (alussa n kpl nollia), joten

$$\|f^{(n)} - (1, 1, 1, \dots)\|_\infty = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tämä tarkoittaa, että jono $(f^{(n)})_{n=1}^\infty$ ei voi supeta avaruudessa $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$.

Normiavaruuden luonnolliset rakenteet ovat yhteensopivat, toisin sanoen:

2.7. Lause. Normiavaruudessa $(E, \|\cdot\|)$ kuvaukset

$$\psi_1: E \times E \rightarrow E, \quad \psi_1(a, b) := a + b, \quad \text{ja}$$

$$\psi_2: \mathbb{K} \times E \rightarrow E, \quad \psi_2(\lambda, a) := \lambda a$$

ovat jatkuvia.

Todistus. Harjoitukset 1. □

Huomautus. Normiavaruuden E metriikka on *siirto-* eli *translaatioinvariantti*: on siis voimassa, että

$$d(x + a, y + a) = \|x + a - (y + a)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

kaikilla $x, y, a \in E$. Tästä sekä ominaisuudesta (N2) seuraa, että $A \subset E$ on avoin (vast. suljettu, kompakti) joss $x_0 + A$ ja λA ovat avoimia (vast. suljettuja, kompakteja), missä $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja $x_0 \in E$ ovat mielivaltaisia. Samoin joukko $U \subset E$, joka sisältää pisteen x_0 on pisteen x_0 ympäristö joss $U - x_0$ on nolla-alkion $\bar{0}$ ympäristö. Pistejono $(x_n)_{n=0}^\infty \subset E$ suppenee alkioon $y \in E$ joss $x_n - y \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$ avaruudessa E .

Edellä käytimme merkintöjä

$$x_0 + A = \{ x_0 + y : y \in A \} \subset E,$$

$$\lambda A = \{ \lambda x : x \in A \}$$

Samoin määritellään, kun $A \subset E$, $B \subset E$ ja $\Lambda \subset \mathbb{K}$,

$$A + B = \{ x + y : x \in A, y \in B \},$$

$$\Lambda A = \{ \lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in A \}$$

Huomautus. Monet funktioavaruuksien konvergenssikäsitteistä voidaan kuvata normin avulla (ja kääntäen, normi antaa konvergenssikäsitteen):

2.8. Esimerkkejä.

(1) Kun avaruus $C(0, 1) = \{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \text{ jatkuva} \}$ varustetaan tavallisella normillaan $\| f \|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$, pätee

$$\| f_n - f \|_\infty \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ tasaisesti joukossa } [0, 1].$$

(2) Toisaalta $C(0, 1)$:ssä voidaan määritellä myös normi $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. (Selvitä itsellesi miksi $\| \cdot \|_1$ on normi $C(0, 1)$:ssä!). Nyt pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| f_n - f \|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0 \Leftrightarrow f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ 'keskimäärin'}$$

Esimerkiksi, jos $f_n(x) = x^n$, niin $f_n \rightarrow 0$ 'keskimäärin' eli normin $\| \cdot \|_1$ mielessä, sillä $\| f_n \|_1 = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Toisaalta jono f_n ei konvergoi sup-normin mielessä 0 -funktioon, sillä $\| f_n \|_\infty = 1$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

Annetuista normiavaruuksista saadaan muodostettua uusia avaruuksia monella eri tavalla. Tulemme jatkossa näkemään tästä useitakin esimerkkejä. Aloitamme seuraavalla yksinkertaisella periaatteella.

2.9. Lause. *Jokainen normiavaruuden $(E, \| \cdot \|)$ vektorialiavaruus F on normiavaruus $(E:n \text{ indusoimalla normilla varustettuna})$.*

2.10. Esimerkkejä.

(1) Voimme esimerkiksi valita $E = B([0, 1], \mathbb{K})$, jolla on aliavaruutena jatkuvien funktioiden avaruus $F = C(0, 1)$. (Lisätieto: $C(0, 1)$ on avaruuden $B([0, 1], \mathbb{K})$ suljettu vektorialiavaruus sup-normin suhteen (myöhemmin).)

(2) Olkoon sitten $E = \ell^\infty$; seuraavat jonoavaruudet ovat sen vektorialiavaruuksia.

$$c := \{ x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n \text{ on olemassa} \},$$

$$c_0 := \{ x = (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{K} \forall n \in \mathbb{N}, \lim_n x_n = 0 \}.$$

Molemmissa normina toimii siis $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$. (Lisätieto: c ja c_0 ovat avaruuden ℓ^∞ suljettuja vektorialiavaruuksia.)

Joskus voi olla hyödyllistä muuttaa normia, ilman että sen määräämä topologia tai konvergenssi muuttuu. Tämä idea johtaa seuraavaan käsitteeseen.

2.11. Määritelmä. Vektoriavaruuden E normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 > 0$, joille

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x \in E$$

2.12. Lause. Olkoot $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ *ekvivalentteja normeja avaruudessa E* . Tällöin ne määrittelevät avaruudessa E samat avoimet ja suljetut joukot (eli ne määrittävät saman topologian).

Todistus. Harjoitukset 1 □

2.13. Esimerkki.

(1) Helposti nähdään, että \mathbb{C}^n :n normit

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

ja

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$$

ovat ekvivalentit; jätämme lukijan tarkastettavaksi arviot

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \quad x \in \mathbb{C}^n.$$

Itse asiassa, tulemme myöhemmin näkemään, että *äärellisulotteisen* vektoriavaruuden kaikki normit ovat ekvivalentit.

(2) Olkoon $\mathcal{P} = \{p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ polynomien muodostama vektoriavaruus. Tällöin esimerkiksi

$$\|p\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \text{ja} \quad \|p\|_2 = \max_k |a_k|, \quad \text{kun } p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

ovat hyvin määriteltyjä (Miksi?) normeja (Miksi?) avaruudessa \mathcal{P} . Normit eivät ole kuitenkaan ekvivalentteja: jos $p_n(z) = \sum_{k=0}^n z^k$, niin jokaisella n pätee $\|p_n\|_2 = 1$ mutta $\|p_n\|_1 = n + 1$. Koska tässä n voidaan valita mielivaltaisen suureksi, normit ovat epäekvivalentit.

2.14. Esimerkki. Merkitään

$$C^k(0, 1) = \{ f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f, f', \dots, f^{(k)} \text{ ovat jatkuvia välillä } [0, 1] \},$$

kun $k \in \mathbb{N}$. Tässä $f^{(j)}$ on funktion f j :s derivaatta, ja $f^{(0)} = f$. Normit

$$\|f\| = \sup_{0 \leq j \leq k} \sup_{0 \leq t \leq 1} |f^{(j)}(t)| = \sup_{0 \leq j \leq k} \|f^{(j)}\|_\infty, \text{ ja}$$

$$\| \|f\| \| = \sum_{j=0}^k \sup_{0 \leq t \leq 1} |f^{(j)}(t)| = \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_\infty$$

ovat ekvivalentteja avaruudessa $C^k(0, 1)$, minkä todistus jää harjoitustehtäväksi.

Normiavaruudessa avoimet (tai suljetut) joukot voivat joskus tuottaa yllätyksiä.

2.15. Esimerkki. Olkoon

$$A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0 : |x_n| < \frac{1}{n} \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}.$$

Tällöin A ei ole avoin joukko normiavaruudessa $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Selvästi nollajono $\bar{0} = (0, 0, \dots) \in A$. Näytämme, että $\bar{0}$ ei ole joukon A sisäpiste, toisin sanoen, ei ole olemassa $r > 0$ jolle avoin pallo $B(\bar{0}, r) \subset A$.

Olkoon $r > 0$ annettu ja $y^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, r/2, 0, \dots)$ (missä $r/2$ on jonon n :s koordinaatti), kun $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $\|y^{(n)}\|_\infty = r/2$, eli $y^{(n)} \in B(\bar{0}, r)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta, jos kiinnitetään $n \in \mathbb{N}$ jolle $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, niin erityisesti $y^{(n)} \notin A$. Näin siis $B(\bar{0}, r) \subset A$ ei ole voimassa millään $r > 0$.

ℓ^p -AVARUUDET

Normiavaruudet ℓ^∞ , c ja c_0 ovat esimerkkejä klassisista Banachin avaruuksista. Mainitsemme vielä esimerkkinä avaruuden

$$\ell^1 = \{x = (x_n)_{n=0}^\infty : \|x\|_1 := \sum_{n=0}^\infty |x_n| < \infty\},$$

joka on *itseisesti* tai *absoluuttisesti suppenevien sarjojen* avaruus. Myös tässä $\|\cdot\|_1$ on helppo todistaa normiksi. Vaikeammin käsiteltäviä esimerkkejä ovat muut ns. ℓ^p -avaruudet, joita nyt ryhdymme määrittelemään.

2.16. Määritelmä. Olkoon $1 \leq p < \infty$. Tällöin

$$\ell^p := \{(x_n)_{n=1}^\infty : \|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Tässä $x_n \in \mathbb{K}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, ja jonojen yhteenlasku ja skalaarilla kertominen on määritelty koordinaateittain: $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ja $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ jonoille (x_n) , (y_n) ja $\lambda \in \mathbb{K}$.

Seuraavassa p ja q ovat reaalilukuja, jotka täyttävät ehdot:

$$p > 1, \quad q > 1 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sanomme lukuja p ja q toistensa *duaalieksponenteiksi*. Esimerkiksi $p = q = 2$ tai $p = 7, q = \frac{7}{6}$ ovat duaalieksponenttipareja. Edelleen on voimassa, että $q = \frac{p}{p-1}$ ja $p + q = pq$.

Seuraavana tavoitteena on osoittaa, että $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus.

2.17. Lemma. *Jos $a \geq 0, b \geq 0$ ja p ja q ovat duaalieksponentteja, niin*

$$(2.18) \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Todistus. Jos $a = 0$ tai $b = 0$, niin (2.18) on voimassa. Voimme olettaa: $a, b > 0$. Merkitään

$$\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q},$$

kun $t > 0$. Tällöin $\varphi'(t) = t^{p-1} - t^{-q-1} = \frac{t^{p+q-1}}{t^{q+1}}$, joten $\varphi'(t) < 0$, kun $0 < t < 1$ ja $\varphi'(t) > 0$, kun $t > 1$. Siispä φ saa pienimmän arvonsa, kun $t = 1$, eli kaikilla $t > 0$

$$1 = \varphi(1) \leq \varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}.$$

Sijoitetaan $t = a^{1/q}b^{-1/p}$, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{a^{p/q}}{pb} + \frac{b^{q/p}}{qa}, \\ \iff ab &\leq \frac{a^{p/q+1}}{p} + \frac{b^{q/p+1}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

sillä $\frac{p}{q} + 1 = p$ ja $\frac{q}{p} + 1 = q$.

□

2.20. Lause (Hölderin epäyhtälö jonoille). *Olkoot $1 < p, q < \infty$ siten, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tällöin*

$$(H) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q$ (tässä $x_k, y_k \in \mathbb{K}$ kaikilla k ja $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ tai $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Siis

$$\|(x_k y_k)\|_1 \leq \|(x_k)\|_p \|(y_k)\|_q,$$

ja erityisesti $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^q \implies$ tulojono $(x_k y_k) \in \ell^1$.

Huomautus. Kun epäyhtälöön (H) sijoitetaan luvut, jotka toteuttaa lisäehdot $0 = x_k = y_k$ kaikilla $k > n$, saadaan erikoistapauksena äärellinen versio Hölderin epäyhtälöstä:

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

kun $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ ja $n = 1, 2, 3, \dots$

Todistus. (Epäyhtälölle (H)):

Merkitään

$$A = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \| (x_k) \|_p, \quad B = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \| (y_k) \|_q,$$

jolloin $A \geq 0, B \geq 0$. Jos $A = 0$ tai $B = 0$, niin $x_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ tai $y_k = 0$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tällöin (H) on ilmeinen, sillä vasen puoli = 0. Voidaan siis olettaa: $A > 0, B > 0$. Kiinnitetään $k \in \mathbb{N}$ ja sovelletaan Lemmaa 2.17, kun $a = \frac{|x_k|}{A}$ ja $b = \frac{|y_k|}{B}$. Saadaan

$$\frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_k|^q}{B^q},$$

mikä on voimassa kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Summataan edelliset muuttujan k suhteen, jolloin

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{A} \cdot \frac{|y_k|}{B} \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|y_k|^q}{B^q} \\ &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{A^p} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p}_{=A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{B^q} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q}_{=B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \end{aligned}$$

joten kertomalla AB :llä puolittain, saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq AB = \| (x_k) \|_p \| (y_k) \|_q.$$

□

Hölderin erikoistapauksella $p = q = 2$ on oma nimitys ja merkitys (vrt. Hilbertin avaruudet, luku 4).

2.21. Seuraus (Schwarzin epäyhtälö). *Jos $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$, niin*

$$(S) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| x \|_2 \| y \|_2$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^\infty, (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$. Lisäksi äärellisten jonojen erikoistapauksessa saadaan

$$(S') \quad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ ja kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Erityisesti, Schwarzin epäyhtälö takaa että avaruudessa ℓ^2 bilineaarimuoto

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k, \quad x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^2$$

on hyvin määritelty. Tämä antaa ℓ^2 :een sisätulon struktuurin; tulemme näkemään Hilbertin avaruuksia koskevassa osaluvussa, että sisätuloavaruuksilla on monia ”poikkeuksellisen hyviä” ominaisuuksia.

Hölderin epäyhtälön avulla voimme osoittaa, että ℓ^p -normit toteuttavat kolmioepäyhtälön; saatua arviota sanotaan (usein) *Minkowskin epäyhtälöksi*.

2.22. Lause (Minkowskin epäyhtälö). *Olkoon $1 < p < \infty$. Tällöin*

$$(M) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla jonoilla $(x_k)_{k=1}^\infty, (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell^p$.

Erityisesti: Kun $(x_k) \in \ell^p, (y_k) \in \ell^p$, niin summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$, joten ℓ^p on siis vektoriavaruus. Valitsemalla $x_k = 0, y_k = 0$ kun $k \geq n + 1$ saadaan äärellinen versio:

$$(M') \quad \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

kaikilla luvuilla $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$.

Todistus. Voidaan olettaa, että $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p > 0$, koska epäyhtälö (M) on muuten ilmeinen.

Olkoon $1 < q < \infty$ sellainen, että $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (eli siis $q = \frac{p}{p-1}$). Hölderin epäyhtälön (H) ja \mathbb{K} :n kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{p-1} \underbrace{|x_k + y_k|}_{\leq |x_k| + |y_k|} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \\ &\stackrel{\text{(H)}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

koska $q(p-1) = p$. Jakamalla saatu epäyhtälö puolittain positiivisella termillä $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}$ saadaan

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1 - \frac{1}{q}} \leq \left(\| (x_k) \|_p + \| (y_k) \|_p \right).$$

Tämä on tarkalleen etsitty Minkowskin epäyhtälö (M) koska $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Edellä sekä Hölderin epäyhtälön (H) käyttö, että viimeisen vaiheen jakaminen, edellyttävät luonnollisesti myös että

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p < \infty,$$

toisin sanoen, että summajono $(x_k + y_k) \in \ell^p$. Tätä tietoa varten riittää alkeellinen arvio

$$(*) \quad |a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p),$$

mikä on voimassa kaikilla $a, b \in \mathbb{K}$. Kun sijoitetaan $a = x_k, b = y_k$ epäyhtälöön (*) ja summataan yli muuttujan k saadaan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq 2^p \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right) < \infty,$$

koska $(x_k), (y_k) \in \ell^p$. Näin Lause 2.22 on saatu täydellisesti todistetuksi. \square

Huomautus. Erikoistapauksessa $p = 2$ äärellisiä jonoja koskeva epäyhtälö (M') on itse asiassa tuttu kolmioepäyhtälö kotiavaruuden \mathbb{K}^n euklidiselle normille

(DII, Topo I), sillä $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$, kun $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $n = 1, 2, \dots$

Kootaan yhteen edelliset tulokset (tapaukset $p = 1$ tai ∞ käsiteltiin aikaisemmin) seuraavaksi tärkeäksi lauseeksi ℓ^p -avaruuksista.

2.23. Lause. $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ on normiavaruus kun $1 < p < \infty$.

Todistus. Jos $x = (x_k) \in \ell^p, y = (y_k) \in \ell^p$ niin $x + y = (x_k + y_k)$ ja Minkowskin epäyhtälön 2.22 mukaan

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

(ja erityisesti $x + y \in \ell^p$ kuten edellä jo nähtiin). Siis (N1) pätee. Koska

$$\|ax\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |ax_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |a| \|x\|_p,$$

kun $x = (x_k) \in \ell^p, a \in \mathbb{K}$, niin myös homogeenisuusehto (N2) on voimassa. Edelleen

$$0 = \|(x_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \implies x_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \implies (x_k) = (0, 0, \dots) = \bar{0},$$

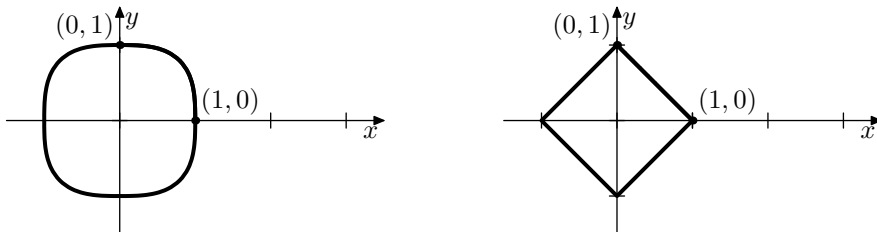
joten myös (N3) toteutuu. □

Huomautus. ℓ^p -avaruuksien välillä pätevät seuraavat sisältyvyudet (joukkoina): $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset c_0 \subset \ell^\infty$ kun $1 < p < q < \infty$. Lisäksi normeille pätevät arviot

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1$$

kaikille jonoille $x = (x_k)$ (Harjoitukset 2).

Edellä olemme piirtäneet yksikköpallot normien $\|\cdot\|_2$ ja $\|\cdot\|_\infty$ suhteen. Entä yksikköpallo yleisten ℓ^p -normien suhteen? Alla kuva tapauksesta $p = 3$ ja $p = 1$ tason \mathbb{R}^2 tapauksessa; mieti millainen on yksikköpallo yleisellä p !



Huomautus (Lisätietoja). On olemassa luontevia vektoriavaruuksia E , joissa on luonnollinen siirtainvariantti topologia τ , joka kuitenkin ei ole minkään E :n normin indusoima (ts. ei ole olemassa sellaista normia $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, että $\tau =$

$\tau_{\|\cdot\|}$). Sellaisten avaruuksien teoriaa ei käsitellä kurssin aikana; esimerkkeinä mainitaan kuitenkin

- (1) Varustetaan avaruus $C(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ topologialla τ , jossa jono $f_n \rightarrow f$ kun $n \rightarrow \infty$, jos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

kaikilla kompakteilla joukoilla $K \subset \mathbb{R}^n$. Topologia τ saadaan kasvavasta *seminormiperheestä* $(\|\cdot\|_m)$, missä

$$\|f\|_m = \sup_{x \in K_m} |f(x)|,$$

$f \in C(\mathbb{R}^n)$ ja $K_m = [-m, m]^n \subset \mathbb{R}^n$, sekä $m \in \mathbb{N}$. Konvergenssia ei kuitenkaan voi kuvata vain yhden normin $\|\cdot\|$ avulla. Topologinen vektoriavaruus $(C(\mathbb{R}^n), \tau)$ on ns. *nukleaarinen Frechet'n* avaruus.

Vastaava koskee myös äärettömän monta kertaa derivoituvien funktioiden avaruutta

$$C^\infty(0, 1) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} \mid f^{(j)} \text{ jatkuva jokaisella } j \in \mathbb{N}\},$$

sekä *avoimella* välillä $(0, 1)$ jatkuvien funktioiden avaruutta

$$\{f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}.$$

- (2) Olkoon $0 < p < 1$. Määritellään: jono $x = (x_k) \in \ell^p$, jos

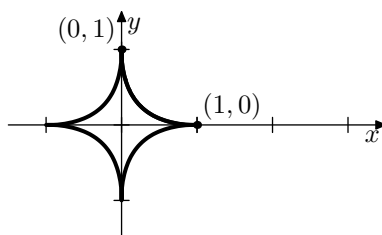
$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Tällöin $x \mapsto \|x\|_p$ toteuttaa normin ehdot (N2) ja (N3) sekä kolmioepäyhtälön muodossa

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\|_p + \|y\|_p)$$

kaikilla $x = (x_k), y = (y_k) \in \ell^p$. Tässä vakio $2^{\frac{1}{p}-1} > 1$, kun $0 < p < 1$, eli $\|\cdot\|_p$ on ns. *kuasinormi* ℓ^p :ssä.

Alla kuva ”yksikköpallosta” $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^p + |y|^p \leq 1\}$, kun $p = 1/2$.



Huomautus. Jokaisessa normiavaruudessa yksikköpallo $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ on konvekksi, so. jos $x, y \in B_E$, niin $tx + (1-t)y \in B_E$ kaikilla $0 < t < 1$. Nimittäin, $\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq 1$. Siispä myöskään yo. kuvan mukaan $\|\cdot\|_p$ ei voi olla normi: vastaava yksikköpallo ei ole konvekksi.

(3) Kaikkien jonojen avaruus

$$s = \{ (x_n) : x_k \in \mathbb{K} \text{ jokaisella } k \in \mathbb{N} \}.$$

Avaruudessa s on summa ja skalaarilla kertominen määritelty kuten ℓ^∞ :ssä, ja metriikka

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

kun $x = (x_k), y = (y_k) \in s$. Voidaan osoittaa, että d on siirtovariantti metriikka (HT). Avaruus s on myös nukleaarinen Frechet'n avaruus.

LINEAARISET OPERAATTORIT

Olkoon E ja F \mathbb{K} -kertoimisia vektoriavaruuksia. Kuvaus $T : E \rightarrow F$ on *lineaarinen* jos

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) \quad \forall x, y \in E \text{ ja } \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Sanomme usein että T on *lineaarinen operaattori*. Usein myös merkitsemme lyhyesti Tx , merkinnän $T(x)$ sijaan.

Äärellisulotteisessa normiavaruudessa kaikki lineaariset kuvaukset ovat jatkuvia (todetaan myöhemmin), mutta äärettömän monen dimension avulla jatkuvuus on helppo rikkoa (annamme esimerkin hieman myöhemmin). Jos E, F ovat normiavaruuksia, on siis luonnollista kysyä:

Koska lineaarinen kuvaus $T : E \rightarrow F$ on jatkuva ??

Vastausta varten tarvitsemme uuden käsitteen, rajoitetut operaattorit.

2.24. Määritelmä. Olkoot E ja F normiavaruuksia sekä $T : E \rightarrow F$ lineaarinen. Sanomme, että T on *rajoitettu*, jos on olemassa vakio $C < \infty$ jolle

$$\|Tx\|_F \leq C \|x\|_E \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Yleisesti sanotaan että normiavaruuden osajoukko $A \subset E$ on rajoitettu, jos $\sup\{\|x\| : x \in A\} \leq M < \infty$; yhtäpitävästi (Miksi?), A :n halkaisija on äärellinen. Helposti nähdään, että lineaarinen kuvaus T on rajoitettu jos ja vain jos se kuvaa E :n rajoitetut joukot F :n rajoitetuiksi joukoiksi.

2.25. **Esimerkki.** Olkoon $E = F = \ell^2$ ja $T : E \rightarrow F$ kuvaus $T : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (3x_{k+1})_{k=1}^\infty$ kun $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$. Tällöin T on lineaarinen (Miksi?) ja rajoitettu:

$$\|Tx\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |3x_{k+1}|^2 \right)^{1/2} = 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \right)^{1/2} \leq 3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} = 3\|x\|_2$$

Huomaamme, että vaadituksi vakioksi voidaan ottaa $C = 3$.

Operaattorin rajoittuneisuus voidaan testata seuraavan suureen avulla.

2.26. **Lemma.** *Lineaarinen operaattori $T : E \rightarrow F$ on rajoitettu jos ja vain jos*

$$(2.27) \quad \|T\| := \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} < \infty.$$

Todistus. Jos T on rajoitettu, niin on olemassa sellainen vakio $C < \infty$, että $\|Tx\| \leq C\|x\|$ kaikilla $x \in E$. Tällöin selvästi $\|T\| \leq C$. Oletetaan kääntäen, että $\|T\| < \infty$. Koska $\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ jokaisella $x \in E, x \neq \bar{0}$, nähdään että

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \|T\| \quad \text{kaikilla } x \in E.$$

Tästä saamme (jatkossa tärkeän arvion!)

$$(2.28) \quad \|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

jokaisella $x \in E$, eli $T : E \rightarrow F$ on rajoitettu. □

Niinkuin merkintä jo vihjaa, saatua suuretta $\|T\|$ kutsutaan lineaarisen kuvauksen T *normiksi* (normin ominaisuudet todetaan myöhemmin). Se mittaa kuinka suureksi joukoksi T kuvaa yksikköpallon $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Olemme siis Lemmassa 2.26 tarkistaneet, että operaattori T on rajoitettu jos ja vain jos sen normi $\|T\| < \infty$. Jos tarve vaatii, merkitsemme avaruudet E ja F näkyviin, so. $\|T\|_{E \rightarrow F}$.

2.29. **Esimerkkejä.** (1) Olkoon $E = \ell^2$ ja $F = \ell^1$ sekä

$$Tx = T(x_k)_{k=1}^\infty := \left(\frac{1}{k} x_k \right)_{k=1}^\infty$$

Onko T rajoitettu operaattorina $\ell^2 \rightarrow \ell^1$? Heti havaitaan että

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |x_k|.$$

Tässä arvio $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}$ ei ole yleisesti totta, vaan käytämme sen sijaan Hölderin epäyhtälöä kun $p = q = 2$,

$$\|Tx\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} = C \|x\|_2$$

missä $C = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2} < \infty$. (Itse asiassa, $C = \sqrt{\pi^2/6}$). Näin ollen $T : \ell^2 \rightarrow \ell^1$ on rajoitettu ja saamme normille arvion $\|T\| \leq \sqrt{\pi^2/6}$.

(2) Rakennetaan seuraavaksi lineaarinen operaattori, joka *ei* ole rajoitettu. Voimme vaikkapa tarkastella kaikkien polynomien muodostamaa avaruutta

$$\mathcal{P} = \left\{ p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

ja varustetaan se normilla $\|p\| = \max\{|a_k| : k = 0, \dots, n\}$.

Tällöin (derivaatta)kuvaus $T : \sum_{k=0}^n a_k z^k \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$ on lineaarinen (Miksi?), mutta se ei ole rajoitettu: Jos $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, silloin

$$\|p_n\| = 1, \quad \|Tp_n\| = \|np_{n-1}\| = n \Rightarrow \sup\{\|Tp\| : \|p\| = 1, p \in \mathcal{P}\} = \infty.$$

Palataan sitten alkuperäiseen kysymykseemme, milloin lineaarinen kuvaus on jatkuva? Käy ilmi, että lineaarinen operaattori on jatkuva täsmälleen silloin kun se on rajoitettu!

2.30. Lause. *Olkoot E, F normiavaruuksia ja $T : E \rightarrow F$ lineaarikuvaus. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

- (i) T on rajoitettu operaattori
- (ii) T on jatkuva (koko E :ssä)
- (iii) T on jatkuva yhdessä pisteessä $x_0 \in E$.

Todistus. (i) \Rightarrow (ii): jos $x, y \in E$ ja $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\|Tx - Ty\| \stackrel{\text{T lin.}}{=} \|T(x - y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\| < \varepsilon \quad \text{kun} \quad \|x - y\| \leq \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

(ii) \Rightarrow (iii): ilmeinen

(iii) \Rightarrow (i): Olkoon T jatkuva pisteessä x_0 . Jos $\varepsilon > 0$ annettu, voimme valita sellaisen luvun $\delta > 0$ että aina

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$$

Jos nyt $x \in E$ ja $\|x\| < \delta$, saadaan

$$\|Tx\| \stackrel{\text{T lin.}}{=} \|T(x + x_0) - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Toisaalta, jos nyt $x \in B_E$ on mielivaltainen, niin $\|\delta x\| = \delta\|x\| \leq \delta$ ja siis

$$\delta\|Tx\| = \|T(\delta x)\| < \varepsilon, \quad \text{eli} \quad \|Tx\| < \frac{\varepsilon}{\delta} \quad \forall x \in B_E.$$

Olemme näin näyttäneet: T on rajoitettu. \square

Erityisesti, näemme, että Esimerkki 2.29 (2) antaa lineaarisen operaattorin $T : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, joka ei ole jatkuva.

Näillä tiedoin voimme myös aloittaa johdannossa esitetyn integraalioperaattorin tarkemman tarkastelun. Tulemme palaamaan teemaan useasti myöhemminkin.

2.31. Esimerkki. Olkoon $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ jatkuva (ns. *ydinfunktio*). Kun $f \in C(0, 1)$, muunnamme sen uudeksi funktioksi Tf , missä

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, s)f(s)ds, \quad x \in [0, 1].$$

Väite: näin saadaan jatkuva lineaarinen operaattori $T : C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$.

Meidän siis on osoitettava kolme asiaa:

1. $f \mapsto Tf$ on lineaarinen,
2. Tf on jatkuva funktio aina kun f on jatkuva välillä $[0, 1]$,
3. operaattorina T on rajoitettu $C(0, 1) \rightarrow C(0, 1)$.

Jätetään 1. väite lukijan tehtäväksi. Väite 2. kertoo että todellakin $T(C(0, 1)) \subset C(0, 1)$. Sitä varten arvioidaan

$$\begin{aligned} |(Tf)(x) - (Tf)(y)| &= \left| \int_0^1 K(x, s)f(s)ds - \int_0^1 K(y, s)f(s)ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |K(x, s) - K(y, s)| |f(s)| ds. \end{aligned}$$

Funktion Tf :n jatkuvuus siis palautuu K :n ominaisuuksiin. Heti kuitenkin huomataan, että pelkkä pisteittäinen K :n jatkuvuus ei riitä, vaan arvio pitää tehdä tasaisesti s :n suhteen. Tarvitsemme siis hieman tietoja Topologian kurssilta: Oletamme tunnetuksi, että kompaktissa joukossa määritelty jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva².

Sovellamme tätä ydinfunktioon $(x, s) \mapsto K(x, s)$. Koska $[0, 1] \times [0, 1]$ on kompakti, jokaisella $\varepsilon > 0$ löydämme sellaisen $\delta > 0$ että jos

$$|x - y| = |(x, s) - (y, s)| < \delta,$$

²Funktio $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ on *tasaisesti jatkuva* jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ että $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Olennaista tässä siis että vaadittu δ riippuu vain etäisyydestä $\|x - y\|$, eikä siitä missä pisteet x, y sijaitsevat.

niin silloin

$$(2.32) \quad |K(x, s) - K(y, s)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } s \in [0, 1].$$

Erityisesti, vaaditun δ :n suuruus ei riippunut pisteestä s . Saamme siksi

$$(2.33) \quad |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \varepsilon \int_0^1 |f(s)| ds \leq \varepsilon \|f\|_\infty, \quad \text{kun } |x - y| < \delta.$$

Koska ε oli mielivaltainen, olemme osoittaneet Tf :n jatkuvuuden (väite 2).

Myös väite 3. käyttää topologista tulosta: Koska K on jatkuva kompaktissa joukossa $[0, 1] \times [0, 1]$, se saa siinä suurimman arvonsa, ja erityisesti K on rajoitettu. Siis eräällä vakiolla $M < \infty$,

$$|K(x, s)| \leq M < \infty \quad \text{kaikilla } x, s \in [0, 1].$$

Näin voimme arvioida

$$|(Tf)(x)| \leq \int_0^1 |K(x, s)| |f(s)| ds \leq M \|f\|_\infty$$

mikä antaa $\|Tf\|_\infty \leq M \|f\|_\infty$. Näin ollen T on rajoitettu operaattori; itse asiassa voimme valita

$$M = \|K\|_\infty = \sup_{(x,s) \in [0,1] \times [0,1]} |K(x, s)|,$$

ja saamme siis arvion $\|T\| \leq \|K\|_\infty$.

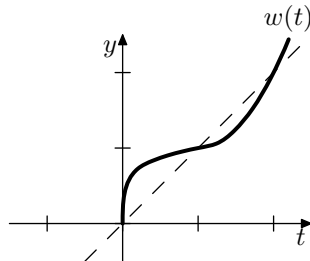
Olemme siten todistaneet viimeisenkin väitteen 3. \square

2.34. *Huomautus.* Yllä esitetty integraalioperaattorin jatkuvuuden todistus antaa hieman enemmänkin kuin mitä Esimerkki 2.31 tarvitsi: Havaitaan että Tf :n jatkuus riippuu olennaisesti vain ytimeistä K eikä niinkään funktiosta f .

Koska tällä havainnolla on käyttöä myöhemmin, formalisoidaan sitä hieman, käyttäen jatkuvuusmodulin käsitettä: Olkoon meillä $w : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jolle

$$t \mapsto w(t) \text{ jatkuva, aidosti kasvava ja } w(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Sanomme silloin että w on *jatkuvuusmoduli*.



Nimittäin, jos A on normiavaruuden E osajoukko ja funktiolle $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ pätee

$$(2.35) \quad |g(x) - g(y)| \leq w(\|x - y\|) \quad \text{kaikilla } x, y \in A,$$

niin w kertoo ”kuinka” jatkuva g on. [Tyypillinen esim: $w(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$.]

Jos g :llä on jatkuvuusmoduli w joukossa A , eli (2.35) pätee, se on selvästikin tasaisesti jatkuva (Miksi?). Mutta pätee myös kääntäen, että jokaisella tasaisesti jatkuvalla funktiolla on jatkuvuusmoduli. Voimme nimittäin asettaa

$$w_0(t) = \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in A, \|x - y\| \leq t\}.$$

Tasaisen jatkuvuuden nojalla w_0 on jatkuva ja $w_0(t) \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow 0$. Aidosti kasvava siitä saadaan määrittelemällä $w(t) = w_0(t) + t$. Tälle (2.35) selvästi pätee, ja siten g :llä on jatkuvuusmoduli w .

Jos palaamme Esimerkkiin 2.31, ytimellä K on ylläolevan nojalla jatkuvuusmoduli w_K . Lisäksi, arviot (2.32), (2.33) antavat

$$(2.36) \quad |(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq w_K(|x - y|) \|f\|_\infty \leq w_K(|x - y|)$$

mikäli $\|f\|_\infty \leq 1$, eli $f \in B_E$, $E = C(0, 1)$. Toisin sanoen, oli f :n jatkuvuus miten heikkoa tahansa, Tf :n jatkuvuus on aina vähintään luokkaa w_K !